

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELO DINÂMICO DE UM MECANISMO PARALELO DE
TRÊS GRAUS DE LIBERDADE**

Renato Maia Matarazzo Orsino

**São Paulo
16 de Novembro de 2011**

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELO DINÂMICO DE UM MECANISMO PARALELO DE
TRÊS GRAUS DE LIBERDADE**

**Trabalho de formatura apresentado á
Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do título de
Graduação em Engenharia**

Renato Maia Matarazzo Orsino

Orientador:

Prof. Dr. Tarcísio Antônio Hess Coelho

Área de Concentração:

Engenharia Mecânica

São Paulo

16 de Novembro de 2011

FICHA CATALOGRÁFICA

Orsino, Renato Maia Matarazzo

Modelo dinâmico de um mecanismo paralelo de três graus de liberdade / R.M.M. Orsino. – São Paulo, 2011. 157 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Engenharia 2. Engenharia mecânica 3. Dinâmica 4. Robô - tica 5. Mecanismos I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II. t.

RESUMO

O objetivo deste projeto é descrever uma metodologia para o desenvolvimento de modelos dinâmicos de um sistema mecânico multicorpos onde os principais efeitos dinâmicos são inércia, atritos nas juntas, elasticidade dos corpos (incluída como efeito a parâmetros concentrados) e forças e torques provenientes dos atuadores do sistema. Os métodos de Lagrange e de Kane para a obtenção de equações diferenciais para estes sistemas mecânicos são discutidos, comparados e os procedimentos para a aplicação destes métodos para a obtenção de modelos matemáticos são descritos. Utilizando o método das transformações homogêneas na análise cinemática é possível aplicar estes modelos para a realização de simulações dinâmicas diretas e inversas. Esta metodologia é aplicada para a modelagem de um mecanismo dinâmico paralelo com três graus de liberdade, e simulações são feitas utilizando parâmetros físicos obtidos a partir de alguns experimentos feitos com um protótipo do mecanismo (também descritos neste relatório). Finalmente, alguns dos principais resultados e algumas possíveis aplicações do modelo são discutidas.

Palavras-chave: Engenharia, Engenharia Mecânica, Dinâmica, Robótica, Mecanismos.

ABSTRACT

The aim of this project is to describe a methodology to develop dynamic models of a multibody mechanical system whose most important dynamical effects are inertia, joints friction, bodies' elasticity (included as a lumped-parameters effect) and the forces and torques from the system's actuators. Lagrange's and Kane's methods for obtaining differential equations of such mechanical systems are discussed, compared and the procedures for the application of these methods to obtain the mathematical models are described. Using the homogeneous transformations methods in the kinematical analysis, it is possible to use these models to do direct and inverse simulations. This methodology is applied for modeling a 3-dof parallel mechanism, and simulations are done using physical parameters obtained from some experiments done with a prototype of the mechanism (also described in this report). Finally, some of the main results are presented and some possible applications of the developed model are discussed.

Keywords: Engineering, Mechanical Engineering, Dynamics, Robotics, Mechanisms.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Protótipos do mecanismo robótico paralelo de três graus de liberdade estudado: (a) protótipo inicial; (b) protótipo final em fase de construção	2
Figura 2 – Representação em CAD do mecanismo 2 RSS+PPaP estudado indicando a notação dos corpos adotada	18
Figura 3 – Representação do modelo de junta esférica adotada no mecanismo estudado	19
Figura 4 – Esquema de simulações que serão realizadas com os modelos dinâmicos do mecanismo	24
Figura 5 – Nomenclatura dos pontos notáveis e dimensões geométricas principais do mecanismo	28
Figura 6 – Definição de coordenadas do modelo.....	29
Figura 7 – Aparato experimental para a realização de ensaios para a determinação das propriedades de atrito da junta prismática ativa do mecanismo.....	34

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Resultados do experimento para a determinação do atrito nas juntas rotativas do paralelogramo	60
Gráfico 2 – Resultados do ensaio experimental para a calibração do LVDT	62
Gráfico 3 – Resultados do ensaio experimental para a calibração da célula de carga.....	62
Gráfico 4 – Resultado de um dos ensaios para a determinação da constante de atrito da junta prismática ativa	63
Gráfico 5 – Resultado dos ensaios para a determinação da constante de atrito da junta prismática ativa	65
Gráfico 6 – Simulação A0: Coordenadas do órgão terminal do mecanismo	68
Gráfico 7 – Simulação A0: Velocidades do órgão terminal do mecanismo..	68
Gráfico 8 – Simulação A0: Acelerações do órgão terminal do mecanismo..	69
Gráfico 9 – Simulação A0: Coordenadas q_4 e q_5	69
Gráfico 10 – Simulação A0: Coordenadas q_4 e q_5 (primeiras derivadas temporais).....	70
Gráfico 11 – Simulação A0: Coordenadas q_4 e q_5 (segundas derivadas temporais).....	70
Gráfico 12 – Simulação A0: Coordenadas q_6 e q_7	71
Gráfico 13 – Simulação A0: Coordenadas q_6 e q_7 (primeiras derivadas temporais).....	71
Gráfico 14 – Simulação A0: Coordenadas q_6 e q_7 (segundas derivadas temporais).....	72
Gráfico 15 – Simulação A0: Coordenadas q_8 e q_9	72
Gráfico 16 – Simulação A0: Coordenadas q_8 e q_9 (primeiras derivadas temporais).....	73
Gráfico 17 – Simulação A0: Coordenadas q_8 e q_9 (segundas derivadas temporais).....	73
Gráfico 18 – Simulação A0: Coordenadas q_{10} e q_{11}	74

Gráfico 19 – Simulação A0: Coordenadas q_{10} e q_{11} (primeiras derivadas temporais).....	74
Gráfico 20 – Simulação A0: Coordenadas q_{10} e q_{11} (segundas derivadas temporais).....	75
Gráfico 21 – Simulação A0: Coordenadas q_{12} e q_{13}	75
Gráfico 22 – Simulação A0: Coordenadas q_{12} e q_{13} (primeiras derivadas temporais).....	76
Gráfico 23 – Simulação A0: Coordenadas q_{12} e q_{13} (segundas derivadas temporais).....	76
Gráfico 24 – Simulação A0: Coordenada q_{14}	77
Gráfico 25 – Simulação A0: Coordenada q_{14} (primeira derivada temporal)	77
Gráfico 26 – Simulação A0: Coordenada q_{14} (segunda derivada temporal)	78
Gráfico 27 – Simulação A0: Coordenada q_{15}	78
Gráfico 28 – Simulação A0: Coordenada q_{15} (primeira derivada temporal)	79
Gráfico 29 – Simulação A0: Coordenada q_{15} (segunda derivada temporal)	79
Gráfico 30 – Simulação A0: Forças τ_1 no atuador da junta prismática (Lagrange e Kane).....	80
Gráfico 31 – Simulação A0: Torques τ_2 e τ_3 nos atuadores das juntas rotativas (Lagrange e Kane)	80
Gráfico 32 – Simulação A1: Coordenadas do órgão terminal do mecanismo	81
Gráfico 33 – Simulação A1: Forças τ_1 no atuador da junta prismática (Lagrange e Kane).....	81
Gráfico 34 – Simulação A1: Torques τ_2 e τ_3 nos atuadores das juntas rotativas (Lagrange e Kane)	82
Gráfico 35 – Simulação A2: Coordenadas do órgão terminal do mecanismo	82
Gráfico 36 – Simulação A2: Forças τ_1 no atuador da junta prismática (Lagrange e Kane).....	83
Gráfico 37 – Simulação A2: Torques τ_2 e τ_3 nos atuadores das juntas rotativas (Lagrange e Kane)	83

Gráfico 38 – Simulação A3: Coordenadas do órgão terminal do mecanismo	84
Gráfico 39 – Simulação A3: Forças τ_1 no atuador da junta prismática (Lagrange e Kane)	84
Gráfico 40 – Simulação A3: Torques τ_2 e τ_3 nos atuadores das juntas rotativas (Lagrange e Kane)	85
Gráfico 41 – Simulação A0: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo.....	87
Gráfico 42 – Simulação B0: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo.....	87
Gráfico 43 – Simulação A0: Velocidades do órgão terminal do mecanismo	88
Gráfico 44 – Simulação B0: Velocidades do órgão terminal do mecanismo	88
Gráfico 45 – Simulação A0: Acelerações do órgão terminal do mecanismo	89
Gráfico 46 – Simulação B0: Acelerações do órgão terminal do mecanismo	89
Gráfico 47 – Simulação A1: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo.....	90
Gráfico 48 – Simulação B1: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo.....	90
Gráfico 49 – Simulação A2: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo.....	91
Gráfico 50 – Simulação B2: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo.....	91
Gráfico 51 – Simulação A3: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo.....	92
Gráfico 52 – Simulação B3: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo.....	92
Gráfico 53 – Simulação A0 linear: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo	99
Gráfico 54 – Simulação B0 linear: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo	100
Gráfico 55 – Simulação A0 linear: Velocidades do órgão terminal do mecanismo.....	100

Gráfico 56 – Simulação B0 linear: Velocidades do órgão terminal do mecanismo.....	101
Gráfico 57 – Simulação A1 linear: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo.....	101
Gráfico 58 – Simulação B1 linear: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo.....	102
Gráfico 59 – Simulação A2 linear: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo.....	102
Gráfico 60 – Simulação B2 linear: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo.....	103
Gráfico 61 – Simulação A3 linear: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo.....	103
Gráfico 62 – Simulação B3 linear: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo.....	104
Gráfico 63 – Simulação C0: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo.....	108
Gráfico 64 – Simulação D0: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo.....	108
Gráfico 65 – Simulação C0: Velocidades do órgão terminal do mecanismo	109
Gráfico 66 – Simulação D0: Velocidades do órgão terminal do mecanismo	109
Gráfico 67 – Simulação C0: Acelerações do órgão terminal do mecanismo	110
Gráfico 68 – Simulação D0: Acelerações do órgão terminal do mecanismo	110
Gráfico 69 – Simulação C0: Deflexões das molas equivalentes à elasticidade dos corpos $B1$ e $B2$	111
Gráfico 70 – Simulação D0: Deflexões das molas equivalentes à elasticidade dos corpos $B1$ e $B2$	111
Gráfico 71 – Simulação C1: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo.....	112

Gráfico 72 – Simulação D1: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo.....	112
Gráfico 73 – Simulação C2: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo.....	113
Gráfico 74 – Simulação D2: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo.....	113
Gráfico 75 – Simulação C3: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo.....	114
Gráfico 76 – Simulação D3: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo.....	114

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Definição dos pontos notáveis do modelo do mecanismo (vide figura 5).....	27
Tabela 2 – Definição de coordenadas e de sistemas de referência utilizados no modelo	28
Tabela 3 – Descrição das coordenadas definidas (vide tabela 1, tabela 2, figura 5 e figura 6).....	30
Tabela 4 – Expressões utilizadas para a obtenção de equações dinâmicas linearizadas.....	41
Tabela 5 – Principais transformações homogêneas utilizadas no estudo da cinemática do mecanismo	45
Tabela 6 – Velocidades angulares dos corpos que compõem o mecanismo.....	46
Tabela 7 – Velocidades angulares parciais não-holonômicas de cada corpo do mecanismo ($p = 3$ para o modelo #1 e $p = 5$ para o modelo #2)	47
Tabela 8 – Expressões de vetores posição de pontos notáveis do mecanismo.....	48
Tabela 9 – Velocidades parciais não-holonômicas de pontos notáveis	49
Tabela 10 – Definição das massas dos corpos que constituem o mecanismo	51
Tabela 11 – Definição das constantes de atrito utilizadas no modelo.....	52
Tabela 12 – Medições de massa dos componentes do paralelogramo	57
Tabela 13 – Parâmetros de geometria e de inércia utilizados no modelo....	58
Tabela 14 – Resultados do experimento para a determinação do atrito nas juntas rotativas do paralelogramo	59
Tabela 15 – Pontos experimentais obtidos nos ensaios de calibração do LVDT e da célula de carga	61
Tabela 16 – Resultado dos ensaios para a determinação da constante de atrito da junta prismática ativa	64
Tabela 17 – Valores dos coeficientes de atrito utilizados nas simulações...	65

Tabela 18 – Pontos iniciais e finais das trajetórias utilizadas nas simulações	67
--	----

LISTA DE SÍMBOLOS

A, B, C, D	Matrizes da forma de espaço de estados de um sistema dinâmico linear
a_i, l, L	Dimensões geométricas do mecanismo ¹
${}^{X_i}\mathbf{a}^{P_j}$	Aceleração ² do ponto P_j medida no referencial X_i
B_i	Corpo rígido que compõe o mecanismo
B_i^*	Centro de massa do corpo B_i
B	Matriz dos termos de amortecimento generalizados
b_i	Constante de amortecimento viscoso
c_i	Notação abreviada para $\cos(q_i)$
D	Função de dissipação de Rayleigh
${}^{X_i}d(\cdot)/dt$	Derivada total calculada no referencial X_i
E	Matriz associada aos termos independentes das coordenadas em uma equação dinâmica
$\mathbf{e}_j^i$	Versor da direção j solidário ao sistema de coordenadas S_i
F_i	Força genérica

¹ Grandezas escalares serão denotadas em itálico.

² Grandezas vetoriais serão denotadas em negrito. Os sobrescritos e subscritos serão omitidos quando o contexto não permitir mais que uma interpretação possível para a notação utilizada.

$\bar{F}_r$	Forças ativas generalizadas não-holonômicas (Kane)
$\bar{F}_r^*$	Forças de inércia generalizadas não-holonômicas (Kane)
$\mathcal{F}$	Matriz dos termos de termos forçantes generalizados
f_i	Equação vincular genérica
g	Aceleração da gravidade
$\mathbf{H}$	Matriz associada aos termos de derivadas de maior ordem em um sistema de equações diferenciais ordinárias
$\mathbf{h}$	Matriz coluna formada pelos termos não associados às derivadas de maior ordem em um sistema de equações diferenciais ordinárias
i, j, r, s	Índices genéricos
$I_{i,j}$	Momento de inércia central do corpo B_i (calculado em relação a um eixo principal que tem a direção j passante pelo seu centro de massa)
$\mathbf{I}^{B_i/P_j}$	Tensor de inércia do corpo B_i relativo ao ponto P_j
$\mathbf{J}$	Jacobiano associado às equações vinculares de um sistema
K	Energia cinética
$\mathcal{K}$	Matriz dos termos de rigidez generalizados
k_i	Constante de rigidez
M	Mobilidade do mecanismo
$\mathcal{M}$	Matriz dos termos de inércia generalizados
m_i	Massa de um dado corpo

N_i	Número associado à entidade i
n	Número de coordenadas utilizadas
P_i	Ponto genérico
p	Número de graus de liberdade de um sistema mecânico
$\mathbf{p}, \mathbf{r}$	Vetor posição geral ou matriz coluna associada
$\mathbf{p}^{P_i P_j}$	Vetor posição do ponto P_j em relação ao ponto P_i
${}^{S_i} \mathbf{p}^{P_j}$	Matriz coluna cujas primeiras linhas são as coordenadas de P_j no sistema S_i e cuja última linha é igual a 1.
Q_i	Esforço generalizado não-conservativo (dinâmica de Lagrange)
$\mathbf{Q}$	Matriz coluna formada por todos os esforços generalizados não-conservativos (dinâmica de Lagrange)
q_i	Coordenada generalizada
$\mathbf{q}$	Matriz coluna formada por todas as coordenadas generalizadas de um sistema
$\mathbf{R}$	Matriz de transformação de base genérica
${}^{S_j}_{S_i} \mathbf{R}$	Matriz de transformação de base do sistema S_i para S_j
$\mathbb{R}(\phi, \mathbf{e})[S]$	Sistema de coordenadas obtido a partir de S pela rotação de seus eixos em torno da direção positiva definida pelo versor $\mathbf{e}$.
S_i	Sistema de coordenadas
s_i	Notação abreviada para $\sin(q_i)$
$\mathbf{T}$	Matriz de transformação genérica

${}_{S_i}^{S_j}\mathbf{T}$	Matriz de transformação homogênea do sistema S_i para S_j
$\mathbb{T}(\mathbf{p})[S]$	Sistema de coordenadas obtido a partir de S pela translação de sua origem de $\mathbf{p}$.
t	Tempo
u_i	Velocidades generalizadas
$\mathbf{u}$	Matriz coluna formada pelas velocidades generalizadas
V	Energia potencial
${}^{X_i}\mathbf{v}^{P_j}$	Velocidade do ponto P_j medida no referencial X_i
$\mathbf{v}_r^{P_i}$	Velocidades parciais holonômicas
$\bar{\mathbf{v}}_r^{P_i}$	Velocidades parciais não-holonômicas
X_i	Referencial
x_i	Variável de estado
$\mathbf{x}$	Vetor de estados (matriz coluna formada pelas variáveis de estado)
${}^{X_i}\boldsymbol{\alpha}^{X_j}$	Aceleração angular do referencial X_j medida no referencial X_i
$\boldsymbol{\beta}$	Matriz que relaciona as derivadas temporais das coordenadas generalizadas a um subconjunto efetivamente independente destas
θ_i	Coordenada generalizada independente
$\boldsymbol{\theta}$	Matriz coluna formada por um conjunto efetivamente independente de coordenadas generalizadas
λ_i	Multiplicador indeterminado

λ	Matriz coluna formada pelos multiplicadores indeterminados
μ_i	Constante auxiliar
τ	Matriz coluna formada pelas variáveis que são entradas de controle de um sistema dinâmico
$\mathbf{u}$	Vetor de entradas (matriz coluna formada pelas variáveis externas que atuam sobre um dado sistema dinâmico)
ψ_i	Coordenada generalizada redundante (função dos θ_j)
Ψ	Matriz coluna formada pelo conjunto redundante de coordenadas generalizadas (funções dos θ_j)
${}^{X_i}\omega^{X_j}$	Velocidade angular do referencial X_j medida no referencial X_i
ω_r	Velocidades angulares parciais holonômicas
$\bar{\omega}_r$	Velocidades angulares parciais não-holonômicas
${}^{X_i}\partial(\cdot)/\partial q_r$	Derivada parcial calculada no referencial X_i
$\partial(\cdot)/\partial \mathbf{q}$	Matriz coluna formada pelas derivadas parciais de uma determinada função com relação a cada um dos q_i
$\mathbf{0}$	Matriz nula
$\mathbb{1}$	Matriz identidade
$(\cdot)'$	Transposição de matriz

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	vi
LISTA DE GRÁFICOS	vii
LISTA DE TABELAS	xii
LISTA DE SÍMBOLOS	xiv
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 OBJETIVOS	1
1.2 DEFINIÇÃO DO ESCOPO	3
1.3 JUSTIFICATIVA	4
2 METODOLOGIA	7
2.1 MODELAGEM CINEMÁTICA.....	7
2.2 MODELAGEM DINÂMICA: METODOLOGIA DE LAGRANGE	10
2.3 MODELAGEM DINÂMICA: METODOLOGIA DE KANE	12
2.4 ESTUDO DA MOBILIDADE DO MECANISMO	17
2.5 INCLUSÃO DE EFEITOS DINÂMICOS NO MODELO.....	20
2.6 DEFINIÇÃO DE COORDENADAS.....	24
2.7 LEVANTAMENTO DE PARÂMETROS DO MODELO	30
2.8 LINEARIZAÇÃO DE EQUAÇÕES DINÂMICAS	36
3 RESULTADOS E ANÁLISES	43
3.1 TRANSFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS E EQUAÇÕES VINCULARES	43
3.2 EXPRESSÕES DE VELOCIDADES E VELOCIDADES ANGULARES	46
3.3 EQUAÇÕES DINÂMICAS DE LAGRANGE – MODELO #1.....	50

3.4	EQUAÇÕES DINÂMICAS DE KANE – MODELO #1	54
3.5	PARÂMETROS FÍSICOS DO MECANISMO	57
3.6	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DE DINÂMICA INVERSA – MODELO #1	66
3.7	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DE DINÂMICA DIRETA – MODELO #1	85
3.8	EQUAÇÕES DINÂMICAS LINEARIZADAS – MODELO #1.....	93
3.9	SIMULAÇÕES DINÂMICAS DIRETAS – MODELO #1 LINEARIZADO	97
3.10	EQUAÇÕES DINÂMICAS DE KANE – MODELO #2	104
3.11	SIMULAÇÕES DINÂMICAS DIRETAS – MODELO #2	106
4	CONCLUSÕES.....	115
4.1	ANÁLISE DA RELEVÂNCIA DE PARÂMETROS E EFEITOS DINÂMICOS.....	115
4.2	CONSIDERAÇÕES FINAIS	118
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	120
	APÊNDICE A – COMPLEMENTOS DE METODOLOGIA	122
A.1	TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS	122
A.2	VELOCIDADE ANGULAR E ACELERAÇÃO ANGULAR.....	124
A.3	COORDENADAS GENERALIZADAS INDEPENDENTES E REDUNDANTES	125
A.4	EXPRESSÕES DA DINÂMICA DE LAGRANGE	127
A.5	EXPRESSÕES DA DINÂMICA DE KANE.....	129
	APÊNDICE B – ROTINAS PARA SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DE EQUAÇÕES DINÂMICAS.....	132

1 INTRODUÇÃO

1.1 OBJETIVOS

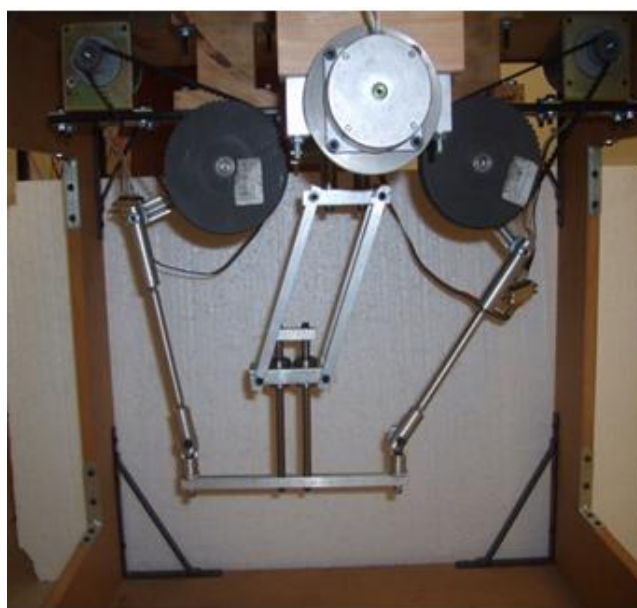
O presente projeto tem por objetivo o desenvolvimento, a validação e o aprimoramento de um modelo dinâmico de um mecanismo robótico paralelo de três graus de liberdade. A linha de trabalho a ser adotada consiste na execução diversas etapas que incluirão desde estudos do mecanismo do ponto de vista teórico até a execução de alguns procedimentos experimentais que permitam o levantamento de parâmetros físicos realísticos para o modelo desenvolvido.

Um primeiro estudo do mecanismo do ponto de vista de seus aspectos cinemáticos fundamentais permitirá um levantamento dos graus de liberdade do seu movimento, viabilizando a formulação matemática de equações cinemáticas para a descrição de suas trajetórias possíveis. Posteriormente, a fim de realizar um levantamento acerca das possibilidades de movimento desse mecanismo, será feito um estudo teórico a fim de obter um modelo dinâmico simplificado que inclua apenas os efeitos principais, e que permita, por meio de simulações dinâmicas inversas, a obtenção de uma noção aproximada do desempenho requerido pelos atuadores do sistema para a realização de algumas trajetórias desejáveis para o tipo de mecanismo proposto.

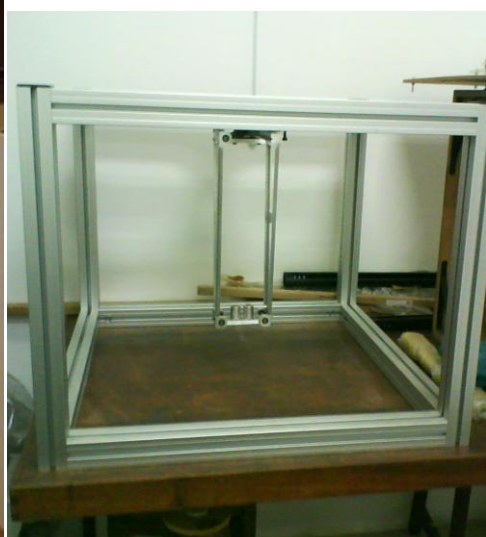
Tendo sido consolidado o modelo matemático teórico, a próxima etapa é o estudo de métodos para a inclusão de efeitos de elasticidade e de atrito nesse modelo. Em princípio, para tal realização, serão utilizados métodos teóricos para a modelagem de tais efeitos, deixando o equacionamento em função de alguns parâmetros. A intenção é que tais parâmetros possam ser objeto de estudos por meio de experimentos a serem realizados com um protótipo do mecanismo (atualmente localizado no Laboratório de Mecânica

dos Sólidos e Impacto em Estruturas da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo) mostrado na figura 1, a fim de que o modelo então obtido seja o mais coerente possível com a dinâmica do sistema real.

Finalmente, por meio da utilização de softwares de simulação dinâmica, serão obtidos resultados a serem utilizados para comparação com os resultados das simulações numéricas do modelo matemático e com os experimentais, para que aprimoramentos e ajustes finais possam ser feitos, de forma que o modelo matemático da cinemática e da dinâmica do mecanismo seja capaz de produzir da forma mais fiel possível o comportamento dinâmico do sistema real, o que viabilizará a utilização desse modelo para o possível desenvolvimento de sistemas de controle, por exemplo.



(a)



(b)

Figura 1 – Protótipos do mecanismo robótico paralelo de três graus de liberdade estudado:
(a) protótipo inicial; (b) protótipo final em fase de construção

1.2 DEFINIÇÃO DO ESCOPO

O presente projeto envolve uma série de procedimentos para o desenvolvimento de um modelo dinâmico de um mecanismo tridimensional de arquitetura paralela com três graus de liberdade. Uma descrição resumida do escopo do projeto consiste na seguinte lista:

1. Desenvolvimento de modelos matemáticos constituídos por equações dinâmicas capazes de descrever o movimento do mecanismo mediante a idealização de seu comportamento por meio de hipóteses simplificadoras.
2. Desenvolvimento de metodologias matemáticas para possibilitar a integração numérica das equações dinâmicas, de tal forma que o algoritmo computacional para esta integração produza resultados confiáveis sem exigir grande capacidade computacional.
3. Realização de simulações numéricas dos modelos matemáticos com posterior análise dos resultados, interpretando fisicamente os fenômenos e verificando a coerência dos resultados obtidos.
4. Aprimoramento do modelo matemático, por meio da inclusão no equacionamento dinâmico de modelos capazes de estimar os efeitos de atrito e elasticidade no movimento do mecanismo.
5. Adaptação das metodologias matemáticas para a integração numérica de equações dinâmicas mais complexas (que incluem mais efeitos no modelo).
6. Comparação dos resultados das simulações numéricas dos modelos matemáticos obtidos pela inclusão de diferentes efeitos dinâmicos, verificação da coerência dos resultados para condições comuns de simulação e interpretação física dos resultados.

7. Avaliação de possibilidades de verificação experimental dos modelos matemáticos desenvolvidos, a fim de aprimorar a representatividade dos mesmos por meio de ajustes de parâmetros físicos do modelo em função de resultados experimentais.
8. Levantamento de algumas das propriedades físicas do mecanismo, a partir da realização de experimentos com partes de um protótipo em construção.
9. Simulação dos modelos aprimorados com verificação de possíveis simplificações a serem executadas no mesmo a fim de que os algoritmos de integração apresentem melhor desempenho sem grandes perdas na confiabilidade e representatividade dos resultados obtidos.
10. Avaliação dos horizontes de possibilidades de aplicação do modelo dinâmico em desenvolvimentos tecnológicos, como o projeto de sistemas de controle para o mecanismo, e em possíveis aprimoramentos da própria arquitetura do mecanismo.

1.3 JUSTIFICATIVA

Ao longo dos anos, desde o final do século XX até os dias atuais, mecanismos robóticos têm encontrado cada dia mais espaço em aplicações, principalmente na indústria, em atividades que exigem movimentos de precisão ou mesmo movimentos rápidos, nas quais têm se mostrado bastante superiores à atividade humana, seja em termos de custo, seja em termos da qualidade do trabalho realizado. Isso motivou ao longo dos anos um crescente estudo da dinâmica desses mecanismos a fim de que os modelos matemáticos utilizados consigam reproduzir todos os aspectos relevantes da dinâmica de tais sistemas, para que os sistemas de controle

elaborados para tais estruturas e baseados em seus modelos matemáticos sejam cada vez mais precisos, o que implica em um aumento da qualidade do trabalho realizado por esses mecanismos, seja pelo aumento da precisão ou pela redução do consumo de energia requerido para a realização de suas atividades.

Contudo, as arquiteturas preferencialmente desenvolvidas, em geral, consistem de mecanismos de estrutura serial (cadeia aberta), que geralmente apresentam maiores facilidades do ponto de vista da obtenção de modelos matemáticos que sejam capazes de reproduzir de maneira fiel seu comportamento dinâmico, justamente pelo fato de esses modelos em geral serem razoavelmente simples, o que implica em maior facilidade para desenvolvimento de algoritmos de controle para tais estruturas. De fato, tal aspecto foi o que justificou o sucesso de tal arquitetura, uma vez que a ausência de ferramentas computacionais suficientemente robustas para a abordagem de sistemas dinâmicos de maior complexidade até poucos anos atrás foi um fator limitante que praticamente inviabilizou o desenvolvimento de estruturas robóticas com novas arquiteturas.

Contudo, com o recente surgimento de uma série de softwares de simulação numérica e modelagem dinâmica, tal fator não mais tem sido limitante, de tal forma que se abre um novo horizonte de possíveis arquiteturas para mecanismos robóticos. Em particular, isso motivou o recente interesse pelo estudo de arquiteturas paralelas, que apesar de dinamicamente mais complexas, apresentam grandes vantagens em relação às arquiteturas seriais convencionais. As principais vantagens na utilização desse tipo de arquitetura sustentam-se no fato de que é possível criar mecanismos que possuam vários graus de liberdade e cujos atuadores estejam todos fixos a uma base imóvel (o que dificilmente é possível no caso de cadeias seriais, onde a solução é colocar os atuadores em movimento juntamente com os corpos que constituem o mecanismo), o que permite uma maior simplicidade construtiva e com peças mais leves, justamente pelo fato de o mecanismo não ser obrigado a suportar os grandes esforços devidos à movimentação

dos atuadores. Com isso, consegue-se que tais mecanismos atinjam velocidades muito maiores ao longo de sua operação, o que fornece nítida vantagem a esse tipo de mecanismo em aplicações como *pick-and-place*, onde se exige uma rápida movimentação de objetos de um local para outro.

Dessa forma, o projeto proposto se adéqua a essa nova tendência de desenvolvimento de arquiteturas não-convencionais de mecanismos robóticos, sendo uma temática de interesse atual em termos do desenvolvimento de tecnologias na área de Engenharia Mecânica.

2 METODOLOGIA

Este capítulo destina-se à descrição dos princípios metodológicos utilizados no decorrer dos desenvolvimentos referentes aos estudos para a obtenção do modelo dinâmico do mecanismo, além da metodologia aplicada nos experimentos realizados ao longo deste projeto. Em alguns casos será feita recorrência à literatura específica, com breves descrições teóricas que permitam elucidar todos os aspectos envolvidos nos procedimentos realizados. Contudo, para não tornar os textos aqui apresentados excessivamente extensos, complementos eventualmente necessários acerca da metodologia serão apresentados no Apêndice A.

2.1 MODELAGEM CINEMÁTICA

Basicamente, a metodologia aplicada para a análise cinemática consiste da possibilidade de se definir sistemas de coordenadas solidários ao referencial definido por cada um dos corpos que constitui o sistema considerando, por hipótese, que tais corpos sejam rígidos, pois esta é uma condição necessária e suficiente para que o corpo em si defina um (e somente um) referencial, conforme Kane, 1985 [1]. Sabe-se que em tais sistemas, as coordenadas de cada ponto pertencente ao corpo rígido correspondente são constantes. Assim as coordenadas desses pontos em qualquer outro sistema de coordenadas podem ser obtidas meramente pela consideração das transformações envolvidas na mudança de um sistema de coordenadas para outro. Tais transformações, conforme visto em Bottema e Roth, 1990 [6], têm caráter algébrico de transformações afins (também denominadas transformações homogêneas) no particular espaço em que o movimento ocorre, sendo possível relacionar as coordenadas de um mesmo ponto em dois sistemas de coordenadas distintos, por meio de uma transformação

desta natureza que independe do particular ponto escolhido e de suas coordenadas, ou seja, que depende somente dos movimentos relativos entre os sistemas de coordenadas adotados. Um detalhamento adicional acerca dessas transformações é feito na seção A.1 do Apêndice A.

De forma geral seja P um ponto do qual se conhecem as coordenadas num sistema de coordenadas S , dadas pela matriz coluna $\mathbf{p}$ (a última linha dessa matriz é igual ao número 1 e somente as anteriores efetivamente representam as coordenadas de P) e seja um referencial S^* , a partir do qual S pode ser obtido por meio de uma translação de origens descrita pela matriz coluna $\mathbf{r}$ e de rotações descritas pela matriz $\mathbf{R}$. As coordenadas do ponto P em S^* podem ser obtidas a partir de uma transformação $\mathbf{T}$ aplicada sobre as coordenadas de P em S (dadas por $\mathbf{p}$), ou seja:

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{T}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p} \quad (1)$$

Em geral, escolhe-se um referencial principal, normalmente associado a um corpo fixo do sistema, e a este se associa um sistema de coordenadas, em relação ao qual será avaliado o movimento de cada corpo do sistema. O procedimento para a análise adotado consiste em escolher quantas coordenadas generalizadas forem necessárias de tal forma que cada matriz de transformação $\mathbf{T}$ entre este sistema de coordenadas principal e os associados aos demais corpos do sistema (no mínimo um sistema associado a cada corpo) tenha sua expressão dada da forma mais simples possível. De forma geral, este procedimento conduz à adoção de um número n de coordenadas generalizadas q_i ($i = 1, \dots, n$) maior que o número p de graus de liberdade do sistema estudado, de tal forma que não há completa independência entre os valores das coordenadas adotadas, pela própria natureza da vinculação física entre os corpos que compõem o sistema.

De forma geral, o conjunto de relações matemáticas que associam coordenadas que descrevem um sistema físico com base nos vínculos existentes neste são denominadas equações vinculares (evidentemente,

somente nas situações em que tais vínculos possam ser expressos por meio de equações). Os vínculos, por sua vez podem ser classificados como (Kane, 1985 [1]; Leech, 1971 [7]) vínculos holonômicos, quando existe a possibilidade de escrever uma equação vincular que envolva as coordenadas generalizadas e outras funções do tempo, mas que não envolva nenhuma derivada temporal dessas coordenadas, e vínculos não-holonômicos, caso contrário (envolve desde casos em que as equações vinculares são formas não explicitamente integráveis com derivadas temporais das coordenadas, até casos em que não é possível expressar o vínculo na forma de uma equação). Se a natureza de todos os vínculos de um sistema físico for holonômica, o sistema é dito holonômico. Por outro lado, se houver vínculos não-holonômicos em um sistema, mas for possível para todos eles escrever equações vinculares que sejam combinações lineares das derivadas temporais das coordenadas generalizadas do sistema (podendo os coeficientes de tal combinação ser funções das próprias coordenadas e do tempo), diz-se que o sistema é não-holonômico simples.

De forma geral, os vínculos holonômicos de um sistema podem ser facilmente determinados considerando, por exemplo, que tem-se um ponto P que é comum a dois corpos A e B deste sistema, que existem sistemas de coordenadas S_A e S_B solidários respectivamente a A e B e que S é o sistema de coordenadas principal; denotando por $\mathbf{p}_A$ as coordenadas de P em S_A , $\mathbf{p}_B$ as coordenadas de P em S_B e $\mathbf{p}$ as coordenadas de P em S . Sabe-se que existem duas matrizes $\mathbf{T}_A$ e $\mathbf{T}_B$ tais que $\mathbf{p} = \mathbf{T}_A \mathbf{p}_A$ e que $\mathbf{p} = \mathbf{T}_B \mathbf{p}_B$. Dessa forma, sendo $\mathbf{T}_A$ e $\mathbf{T}_B$ expressas como funções das coordenadas generalizadas q_i ($i = 1, \dots, n$), a igualdade $\mathbf{T}_A \mathbf{p}_A = \mathbf{T}_B \mathbf{p}_B$ expressa equações vinculares holonômicas do sistema.

Finalmente, cabe observar que as equações vinculares holonômicas se derivadas temporalmente, e as equações vinculares não-holonômicas simples, de forma geral podem ser reunidas e postas na forma matricial $\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{J}$ é denominado Jacobiano das coordenadas generalizadas (matriz com $n - p$ linhas e n colunas) e $\dot{\mathbf{q}}$ é a matriz coluna formada pelas

derivadas temporais das coordenadas generalizadas (ou seja, pelos $\dot{q}_i$). Como o sistema possui p graus de liberdade, isto significa que existe um conjunto de p coordenadas dentre as n definidas formado somente por coordenadas independentes e, portanto, podem-se explicitar tais p coordenadas como funções do tempo (ou seja, pode-se definir uma trajetória para o sistema), e as $n - p$ equações $\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ podem ser integradas fornecendo os históricos temporais das demais $n - p$ coordenadas (os valores iniciais dessas demais coordenadas, a serem usados para a integração desta equação podem ser obtidos a partir da solução numérica das equações vinculares por meio de métodos tais como o de Newton-Raphson e suas variantes como, por exemplo, uma apresentada em Kane, 1985 [1] e mostrada na seção A.3 do Apêndice A).

2.2 MODELAGEM DINÂMICA: METODOLOGIA DE LAGRANGE

Os principais destaques do método de Lagrange de modelagem dinâmica consistem no fato de que o equacionamento dispensa a utilização de grandezas vetoriais e no fato de que os termos associados a forças de inércia e forças ativas conservativas podem facilmente ser obtidos por meio de derivadas das expressões das energias cinética e potencial escritas em termos das coordenadas generalizadas e de suas derivadas temporais. Ainda, tal metodologia de equacionamento permite a utilização de um número de coordenadas n maior que o número de graus de liberdade p do sistema, bastando para isso utilizar a forma das equações de Lagrange com multiplicadores. Denotam-se por K a energia cinética de todo o sistema, V a expressão da energia potencial, e consideram-se as seguintes notações: $\mathbf{q}$ é a matriz coluna formada pelas coordenadas generalizadas q_i ($i = 1, \dots, n$), $\partial(\cdot)/\partial\mathbf{q}$ é a matriz coluna formada pelas n derivadas $\partial(\cdot)/\partial q_i$, $\mathbf{Q}$ é uma matriz coluna formada pelas forças ativas não-conservativas generalizadas Q_i (onde cada Q_i é dado pela somatória dos produtos escalares das forças

não-conservativas pelas derivadas parciais em relação aos $\dot{q}_i$ das velocidades dos pontos de aplicação destas com os produtos escalares dos torques pelas derivadas parciais das velocidades angulares em relação aos q_i), λ é uma matriz coluna formada por $n - p$ multiplicadores indeterminados (também conhecidos como multiplicadores de Lagrange) e J' é a matriz transposta do Jacobiano das coordenadas generalizadas. Detalhamentos adicionais acerca das expressões envolvidas para a determinação dessas funções são discutidos na seção A.4 do Apêndice A. A forma das equações de Lagrange utilizada para a obtenção da modelagem dinâmica é dada por (adaptado de Leech, 1971 [7]):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{Q} + \mathbf{J}'\lambda = \mathbf{0} \quad (2)$$

Para o caso particular em que o número de esforços provenientes de atuadores (ou seja, esforços que pretendem controlar o movimento do sistema) é igual ao número p de graus de liberdade do sistema (de fato, pois um número de atuadores igual ao de graus de liberdade, certamente garante a controlabilidade do sistema), pode-se definir uma matriz coluna τ com p linhas, associada a esses esforços de tal forma que existe uma matriz $\mathbf{E}$ que satisfaz $\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{Q}} - \mathbf{E}\tau$, onde $\tilde{\mathbf{Q}}$ contém somente os termos referentes a esforços não-conservativos que não provém de atuadores, e assim, pode-se dizer que, sendo conhecida a trajetória do sistema (o que é suficiente para a determinação de todas as coordenadas do sistema conforme visto na seção anterior), os esforços provenientes dos atuadores necessários para o sistema realizar seu movimento podem ser calculados como se segue (supondo inversível a matriz $[\mathbf{E} \quad \mathbf{J}']$):

$$\begin{bmatrix} \tau \\ \lambda \end{bmatrix} = -[\mathbf{E} \quad \mathbf{J}']^{-1} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{Q}} \right) \quad (3)$$

De outra forma, sendo conhecido o histórico temporal da matriz coluna τ dos esforços provenientes de atuadores como uma função do tempo (aqui não mais há a necessidade de que o número de linhas de τ seja igual a p), pode-

se facilmente integrar as equações dinâmicas para a obtenção dos históricos das coordenadas dos corpos, bastando para tal considerar que a equação (2) pode ser posta na forma $\mathbf{H}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\tau}, t) - \mathbf{J}'(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}$, com $\mathbf{H}$ sendo uma matriz quadrada de ordem n e $\mathbf{h}$ sendo uma matriz coluna com n linhas e que como $\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, de tal forma que:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{J}' \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ -\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Assim, como a equação (3) viabiliza a obtenção de $\ddot{\mathbf{q}}$, o procedimento de integração pode ser realizado segundo algum método tradicional como o de Runge-Kutta de quarta ordem, por exemplo. Dessa forma, o procedimento descrito pela equação (3) viabiliza a utilização das equações dinâmicas de Lagrange do sistema para a obtenção, a partir de uma trajetória conhecida do mesmo, do histórico temporal do conjunto de esforços provenientes de atuadores necessários para a realização desta trajetória. Tal procedimento é conhecido na literatura como simulação dinâmica inversa. O procedimento descrito na equação (4), por outro lado, é denominado simulação dinâmica direta, pois a partir do conhecimento dos esforços provenientes dos atuadores, determina-se por meio de integração das equações dinâmicas, a trajetória completa do sistema, detalhando-se o histórico temporal de todas suas coordenadas.

2.3 MODELAGEM DINÂMICA: METODOLOGIA DE KANE

A metodologia de Kane está baseada nos conceitos de velocidades e velocidades angulares parciais. Basicamente tais conceitos estão relacionados com os movimentos efetivamente possíveis que o sistema realiza obedecendo a todos os seus vínculos e basicamente trabalha com o equilíbrio entre forças de inércia e forças ativas projetadas sobre tais velocidades. Primeiramente, Kane [1] introduz o conceito de velocidade

generalizada u_i , que pode ser definida como qualquer combinação linear dentre as derivadas temporais das coordenadas generalizadas, sendo que os coeficientes dessa combinação podem ser quaisquer funções das coordenadas q_j ($j = 1, \dots, n$) e do tempo t (eventualmente tal expressão dos u_i pode ainda envolver termos adicionais independentes dos $\dot{q}_j$ e dependentes exclusivamente dos q_j e do tempo t). Devem ser definidas n velocidades generalizadas de tal forma que cada $\dot{q}_j$ possa ser escrito explicitamente como função dos u_i ($i = 1, \dots, n$). A forma mais trivial para definir os u_i é escolher cada um como sendo igual a um $\dot{q}_i$, ou seja, $u_i = \dot{q}_i$. Se o particular sistema escolhido possui p graus de liberdade, é possível, por meio de manipulação algébrica sobre a equação $\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, encontrar relações entre os $\dot{q}_i$ que permitam escrever os $u_{p+1}, \dots, u_n$ como combinações lineares dos $u_1, \dots, u_p$ (onde os coeficientes dessa combinação linear são funções dos q_i e do tempo). Note que o que foi discutido até então é válido tanto para um sistema holonômico com coordenadas redundantes (ou seja, em número maior que o de graus de liberdade do sistema) quanto para um sistema não-holonômico simples, sendo assim tal metodologia válida para ambos os tipos de sistema. Dessa forma, em termos de equacionamento pela metodologia de Kane, um sistema holonômico com coordenadas redundantes pode ser tratado como se fosse um sistema não-holonômico simples, não havendo perda de generalidade alguma em se fazer tal identificação.

Definem-se as velocidades parciais não-holonômicas de um determinado ponto P em um referencial X (nesta seção X será considerado um referencial inercial) como sendo as derivadas parciais da velocidade de P no referencial X com relação a cada u_i ($i = 1, \dots, p$), notando que cada velocidade nesse sistema pode ser escrita em função dos $\dot{q}_j$ ($j = 1, \dots, n$) e que cada $\dot{q}_j$ pode ser escrito como combinação linear dos u_i ($i = 1, \dots, p$), conforme discutido no parágrafo anterior. As velocidades angulares parciais não-holonômicas de um corpo B no referencial X , podem ser definidas como sendo as

derivadas parciais com relação aos u_i ($i = 1, \dots, p$) da velocidade angular do corpo B relativamente ao referencial X .

Tendo as velocidades e velocidades angulares parciais não-holonômicas, pode-se definir as forças ativas generalizadas não-holonômicas e as forças de inércia generalizadas não-holonômicas. A i -ésima força ativa generalizada não-holonômica $\bar{F}_i$ de um sistema é definida como sendo a somatória dos produtos escalares entre forças resultantes sobre cada partícula que compõe o sistema e as respectivas i -ésimas velocidades parciais não-holonômicas ($i = 1, \dots, p$). Pela natureza das forças de vínculo e das velocidades parciais não-holonômicas, Kane [1] demonstra que as mesmas não têm efeito algum no cálculo das forças ativas generalizadas, de tal forma que não há necessidade de conhecê-las para equacionar a dinâmica do sistema. Em particular esta é uma vantagem também observada na aplicação do formalismo de Lagrange, sendo ambas as metodologias vantajosas nesse particular quesito com relação a métodos anteriores tais como Newton-Euler, por exemplo. Ainda, Kane [1] demonstra que para cada corpo rígido que compõe o sistema estudado, a parcela correspondente às forças ativas generalizadas não-holonômicas associadas a este corpo pode ser dada da seguinte forma: sabe-se que em um corpo rígido B , é possível promover a equivalência entre o sistema de forças que atua sobre este corpo, substituindo-o pela resultante do sistema de forças aplicada em uma linha de ação passante por um ponto P desse sistema e pelo momento resultante do sistema de forças com pólo em P , de tal forma que a i -ésima força ativa generalizada não-holonômica associada ao corpo B pode ser dada pelo produto escalar entre a i -ésima velocidade angular parcial não-holonômica desse corpo e o momento resultante do sistema de forças atuante sobre este corpo com relação ao pólo P somado com o produto escalar da i -ésima velocidade parcial não-holonômica do ponto P com a resultante do sistema de forças atuantes em B . Naturalmente, conforme discutido, do sistema de forças atuantes sobre o corpo B , as forças de vínculo podem ser simplesmente ignoradas no equacionamento

dinâmico, pois a natureza dos vínculos do sistema já se encontra perfeitamente descrita por meio das expressões das velocidades e velocidades angulares parciais não-holonômicas.

Em analogia, a i -ésima força de inércia generalizada não-holonômica $\bar{F}_i^*$ de um sistema é definida como sendo a somatória dos produtos escalares entre forças de inércia de cada partícula que compõe o sistema e as respectivas i -ésimas velocidades parciais não-holonômicas ($i = 1, \dots, p$). Em particular, para um corpo rígido B , a parcela dessa força de inércia generalizada associada a B é dada por: $(\bar{F}_i^*)_B = \bar{\omega}_i \cdot \mathbf{M}^* + \bar{\mathbf{v}}_i^* \cdot \mathbf{R}^*$ ($i = 1, \dots, p$). Nesta equação, $\bar{\omega}_i$ é a i -ésima velocidade angular parcial não-holonômica do corpo B no referencial X , $\mathbf{M}^* = -\alpha \cdot \mathbf{I} - \omega \times \mathbf{I} \cdot \omega$ (com α sendo a aceleração angular do corpo B no referencial X , ω sendo a velocidade angular de B em X e $\mathbf{I}$ sendo o tensor de inércia central do corpo B), $\bar{\mathbf{v}}_i^*$ é a i -ésima velocidade parcial não-holonômica do centro de massa do corpo B em X e $\mathbf{R}^* = -m\mathbf{a}^*$ (onde m é a massa do corpo e $\mathbf{a}^*$ é a aceleração do centro de massa do corpo em X). Detalhes adicionais acerca da obtenção dessas expressões são fornecidos na seção A.5 do Apêndice A.

Finalmente, como consequência imediata da forma de D'Alembert da Segunda Lei de Newton, decorre que as equações dinâmicas que descrevem o comportamento do sistema podem ser dadas por:

$$\bar{F}_i + \bar{F}_i^* = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, p \quad (5)$$

Deve-se notar, que aqui fica evidente uma grande vantagem do equacionamento de um sistema dinâmico segundo a metodologia de Kane ante a de Lagrange. Tal vantagem consiste no fato de que o número de equações dinâmicas não é igual ao número n de coordenadas adotadas, mas sim igual ao número p de graus de liberdade do sistema, dispensando dessa forma a utilização de artifícios como os multiplicadores indeterminados que invariavelmente têm que acabar sendo eliminados numericamente (eventualmente em casos mais simples é possível realizar uma simplificação algébrica nas próprias expressões das equações de

Lagrange, eliminando os multiplicadores segundo artifícios dessa natureza, o que dispensará o cálculo numérico dos mesmos na simulação das equações). Com um número reduzido de equações, fica claro que os métodos numéricos de simulação serão mais simples e assim terão melhor desempenho computacional e menores riscos de ocorrência de erros numéricos. Uma desvantagem evidente, contudo, é que a obtenção das expressões das forças de inércia generalizadas é mais complexa do que no método de Lagrange, pois envolve o cálculo de acelerações e acelerações angulares, o que é mais laborioso que o cálculo de velocidades e velocidades angulares para a obtenção de expressões de energia cinética (apesar de ser um procedimento passível de mecanização segundo a metodologia de análise cinemática aplicada).

As equações de Kane podem ser postas em forma matricial, bastando notar que devem existir matrizes $\mathbf{H}$ (com p linhas e n colunas), $\mathbf{h}$ (com p linhas e uma coluna) e $\mathbf{E}$ (com p linhas e com número de colunas igual ao de esforços provenientes de atuadores) tais que todas as equações dinâmicas de Kane fiquem escritas como: $\mathbf{H}(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{E}(\mathbf{q}, t)\boldsymbol{\tau}$ (aqui $\boldsymbol{\tau}$ é uma matriz coluna formada pelos esforços provenientes dos atuadores do sistema, $\mathbf{q}$ é uma matriz coluna formada pelas coordenadas generalizadas e $\mathbf{u}$ é uma matriz coluna formada pelas velocidades generalizadas).

Assim, as equações postas em tal forma permitem a realização de simulações dinâmicas inversas e diretas. No primeiro caso, novamente deve-se considerar o sistema peculiar no qual o número de esforços provenientes de atuadores seja igual ao número p de graus de liberdade do mecanismo, de tal sorte que a matriz $\boldsymbol{\tau}$ pode ser obtida por:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{E}^{-1}(\mathbf{H}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{h}) \quad (6)$$

O procedimento para a integração de tais equações dinâmicas para um dado conjunto de esforços de atuadores $\boldsymbol{\tau}$ (não havendo aqui qualquer restrição quanto à dimensão de $\boldsymbol{\tau}$) novamente deve envolver um artifício que utiliza as equações vinculares, uma vez que as equações dinâmicas de Kane estão

em número menor que o de variáveis incógnitas do problema. Notando que, pela definição dos u_i devem existir matrizes $\mathbf{W}$ e $\mathbf{Z}$ tais que $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}(\mathbf{q}, t)\mathbf{u} + \mathbf{Z}(\mathbf{q}, t)$, substituindo nas equações vinculares na forma $\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, obtém-se $\mathbf{J}\mathbf{W}\mathbf{u} = -\mathbf{J}\mathbf{Z}$, de tal forma que denotando $\bar{\mathbf{W}} = \mathbf{J}\mathbf{W}$ e $\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{J}\mathbf{Z}$ e derivando temporalmente essa expressão, tem-se: $\bar{\mathbf{W}}\dot{\mathbf{u}} = -\dot{\bar{\mathbf{Z}}} - \dot{\bar{\mathbf{W}}}\mathbf{u}$. Assim, o procedimento de integração das equações dinâmicas de Kane pode ser realizado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{W}\mathbf{u} + \mathbf{Z} \\ \dot{\mathbf{u}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \bar{\mathbf{W}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{h} + \mathbf{E}\boldsymbol{\tau} \\ -\dot{\bar{\mathbf{Z}}} - \dot{\bar{\mathbf{W}}}\mathbf{u} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (7)$$

Tais equações podem ser integradas numericamente utilizando algoritmos tradicionais de integração como o de Runge-Kutta de quarta ordem, viabilizando a obtenção do histórico das n coordenadas do movimento e das n velocidades generalizadas do sistema estudado.

2.4 ESTUDO DA MOBILIDADE DO MECANISMO

O mecanismo estudado é mostrado na figura 2. O corpo B_0 representa a base deste mecanismo, sendo um corpo que pode ser considerado fixo com relação a um referencial inercial. O corpo B_{10} por sua vez é o denominado órgão terminal do mecanismo, que é aquele cujo movimento efetivamente é relevante de se analisar. Nota-se que o mecanismo apresenta três cadeias conectando o órgão terminal à base do mecanismo, sendo tais cadeias $B_0B_1B_3B_5B_7B_{10}$, $B_0B_2B_4B_6B_8B_{10}$ e $B_0B_9B_{10}$. Os corpos B_3 , B_4 , B_7 e B_8 representam as peças B, na notação da figura 3, das juntas esféricas presentes nas respectivas cadeias. De forma geral, deve-se notar que as cadeias $B_0B_1B_3B_5B_7B_{10}$ e $B_0B_2B_4B_6B_8B_{10}$ são cadeias idênticas em termos de arquitetura. Assim, as juntas B_0B_1 e B_0B_2 são juntas rotativas com atuadores, estando os mesmos solidários à base B_0 do mecanismo e

impondo torques aos corpos B_1 e B_2 . As juntas B_1B_3 e B_2B_4 , bem como as juntas B_3B_5 e B_4B_6 também são rotativas, constituindo uma junta esférica conforme a indicada na figura 3. Sabe-se que o corpo indicado por A na figura é rigidamente conectado aos corpos B_1 e B_2 nas respectivas juntas e o corpo B representa B_3 e B_4 ; os corpos C e D por sua vez podem ser considerados solidários a B_5 e B_6 , dado que o movimento relativo entre C e D em princípio permitido é totalmente irrelevante para o movimento do mecanismo, sendo inexistente em condições normais de uso. As juntas $B_{10}B_7$ e $B_{10}B_8$ são análogas a B_1B_3 e B_2B_4 , assim como B_7B_5 e B_8B_6 são análogas a B_3B_5 e B_4B_6 .

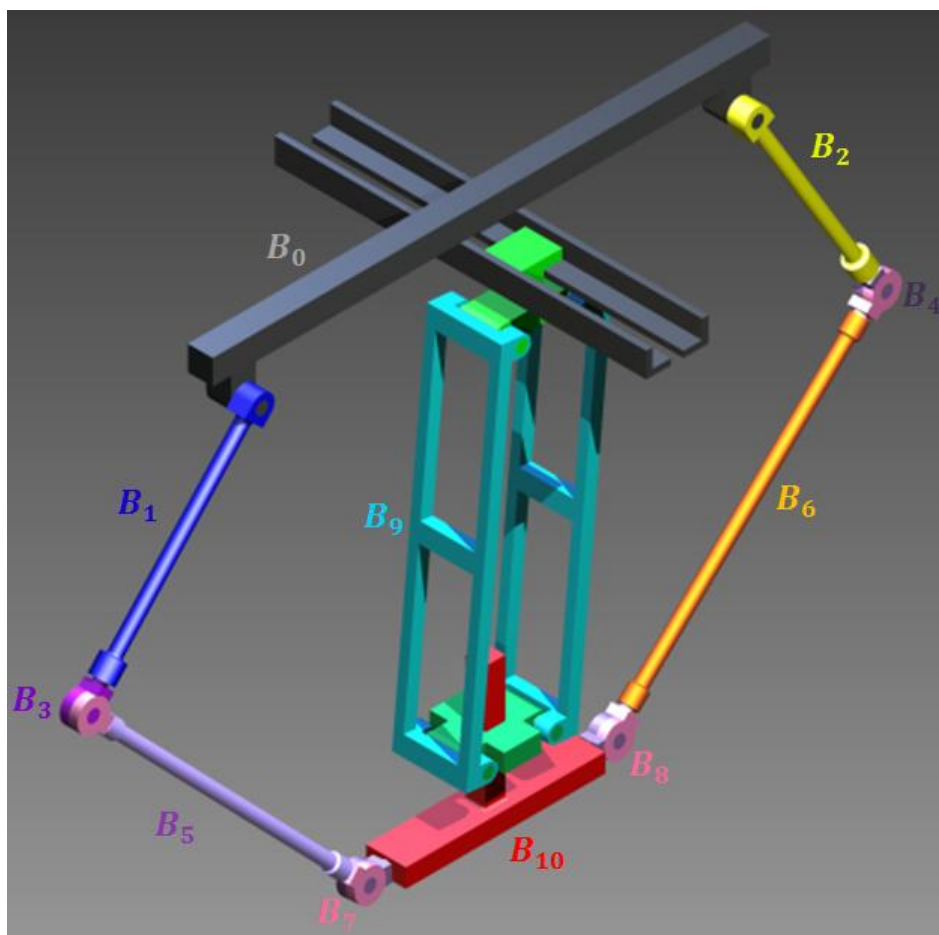


Figura 2 – Representação em CAD do mecanismo 2 RSS+PPaP estudado indicando a notação dos corpos adotada

A junta B_0B_9 é uma junta prismática com atuador que permite um grau de liberdade translacional entre esses corpos. O corpo B_9 de fato é um

quadrilátero passivo e a junta B_9B_{10} pode ser entendida como uma junta que permite dois graus de liberdade translacionais entre esses corpos.

Mediante essas considerações, o estudo de Almeida e Hess-Coelho (2010) [4] deste mecanismo o classifica como uma estrutura $2 \underline{RSS} + \underline{PPaP}$. Segundo Tsai (1999) [8], uma estrutura cinemática paralela é dita topologicamente simétrica se todas as cadeias que a compõem possuem os mesmos tipos, número e sequência de juntas, de tal forma que fica claro que o mecanismo estudado pode ser classificado como uma estrutura assimétrica.

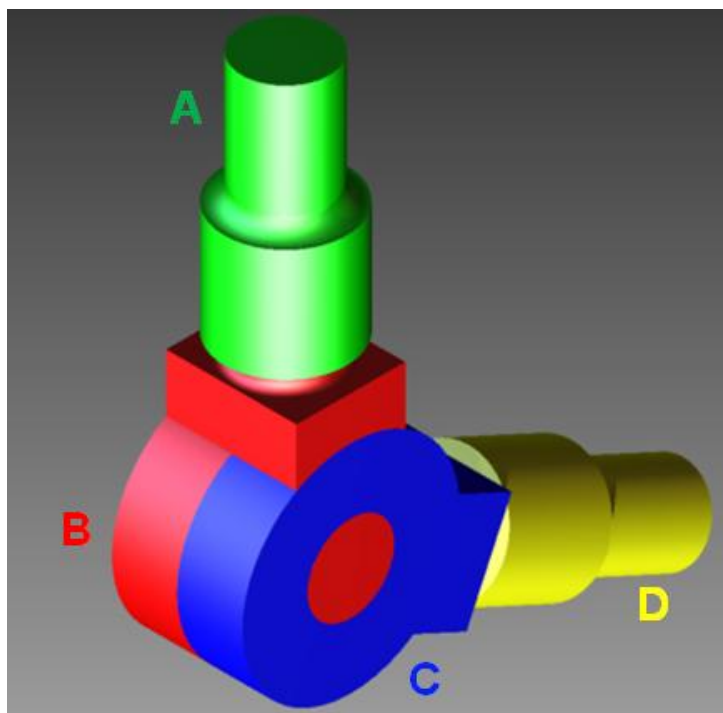


Figura 3 – Representação do modelo de junta esférica adotada no mecanismo estudado

Para determinar a mobilidade desse mecanismo, pode-se aplicar o método da teoria dos grupos de deslocamento de Lie, citado em Hess-Coelho (2008) [3], que afirma que em um mecanismo de arquitetura paralela, o movimento resultante do órgão terminal pode ser obtido pela interseção dos movimentos permitidos por cada cadeia que o conecta à sua base. Considerando que cada cadeia $\underline{RSS}$ individualmente é incapaz de restringir o movimento do órgão terminal (ou seja, permite seis graus de liberdade a seu movimento) e

que a cadeia PPaP individualmente permite somente três translações relativas entre o órgão terminal e a base do mecanismo, de tal forma que, a mobilidade do mecanismo é igual a 3 (ou seja, seu órgão terminal fica restrito a essas três translações).

2.5 INCLUSÃO DE EFEITOS DINÂMICOS NO MODELO

O mecanismo fundamentalmente pode ser tratado como sendo um sistema dinâmico multicorpos, havendo assim certa complexidade envolvida em sua modelagem. Deseja-se, contudo, que o modelo obtido seja representativo da dinâmica de um protótipo real desse mecanismo, de tal forma que as simulações numéricas do modelo sejam capazes de produzir resultados bastante próximos do observado na realidade. Para tal, o modelo deve ser capaz de incluir efeitos que efetivamente podem ser observados como, por exemplo, deformações elásticas dos corpos que compõem o mecanismo e atritos nas juntas que dissiparão parte da energia utilizada para a movimentação desse mecanismo. Para que tais efeitos possam ser incluídos de forma representativa sem que isso envolva considerar mudanças de forma nos corpos do modelo bem como folgas relativas entre eles (o que levaria à perda da valiosa hipótese de considerar todo o sistema como sendo composto por corpos rígidos, o que, conforme visto nas seções 2 a 2.3 conduz a uma imensa simplificação na modelagem cinemática e dinâmica), optou-se pela inclusão de efeitos concentrados com parâmetros experimentalmente ajustáveis que permitam realizar boas aproximações mantendo todos os corpos que compõem o modelo como sendo rígidos.

Genericamente, qualquer modelo que dinâmico que seja feito desse mecanismo deve obrigatoriamente considerar os efeitos dos esforços provenientes dos atuadores do sistema. Tais esforços de atuadores para controle podem ser considerados como exercidos nas juntas rotativas B_0B_1 e

B_0B_2 e na junta prismática B_0B_9 , sendo os dois primeiros tratados como torques e o último como uma força.

Ainda, devem ser considerados os esforços devidos ao campo gravitacional, que pela configuração de montagem do mecanismo atua na direção vertical descendente em relação à vista representada na figura 2, e cujos efeitos podem ser equivalentes a forças concentradas atuantes nos centros de massa de cada corpo, de magnitude igual ao produto da massa desse corpo pela intensidade do campo gravitacional e na mesma direção e sentido desse campo.

Também é importante considerar no modelo os efeitos dinâmicos da inércia dos corpos desse mecanismo, afinal tais efeitos são muito importantes em um sistema sujeito a acelerações e desacelerações de elevada magnitude. O tratamento dos efeitos das inércias pode ser feito de maneira bastante simples com as metodologias de Lagrange e de Kane, conforme discutido nas seções 2.2 e 2.3, contanto que se considere que os corpos são rígidos. Demonstra-se (vide Kane, [1]) que um corpo rígido em movimento em um espaço tridimensional possui no máximo seis graus de liberdade de movimento, havendo um número menor de graus de liberdade quando o corpo encontra-se vinculado a outros, não sendo excessivamente complexa a análise dinâmica com corpos rígidos extensos se comparada à análise com massas concentradas, uma vez que uma massa concentrada possui no máximo três graus de liberdade em um espaço tridimensional.

Os efeitos de atrito serão considerados como sendo relacionados apenas ao deslocamento relativo entre dois corpos que compõem uma determinada junta, se expressando por meio de forças e torques que sejam linearmente proporcionais às velocidades e velocidades angulares relativas entre as partes, respectivamente e que atuem exatamente no sentido oposto a essas velocidades e velocidades angulares. Dessa forma, se entre duas peças X e Y houver um movimento translacional (rotacional) relativo cuja velocidade

(velocidade angular) relativa seja $\mathbf{v}(\omega)$, aparece uma força (torque) de atrito dada(o) por $-b\mathbf{v}$ ($-b\omega$) onde b é um escalar positivo.

Os efeitos de elasticidade por sua vez, tomados de forma concentrada podem ser modelados como sendo molas lineares ideais presentes nas juntas, mantendo a direção aproximada das deformações do mecanismo real de tal sorte que as forças elásticas existentes sejam linearmente proporcionais a essas deformações. A possibilidade da existência de tais deformações faz com que o sistema completo tenha um número de graus de liberdade maior do que a mobilidade do mecanismo, dado que cada deformação dessa natureza representa um grau de liberdade adicional.

Para o particular mecanismo, a modelagem de efeitos de elasticidade feita considera somente os efeitos de elasticidade que devem ser mais aparentes e influentes na dinâmica do mecanismo. Isso exige uma análise acerca da maneira como os esforços são transmitidos por cada cadeia do mecanismo. Em particular, nas cadeias RSS, pode-se verificar que pela própria arquitetura dessas estruturas, a transmissão de esforços se dá de tal forma que os corpos B_5 e B_6 estejam predominantemente submetidos a forças normais (na direção de seus eixos geométricos principais), o que resulta que tais corpos estejam assim submetidos a deformações normais. Dessa forma, os corpos B_1 e B_2 podem ser concebidos como sendo barras submetidas a esforços normais, cortantes e de flexão, predominantemente (pela arquitetura das juntas esféricas, também deve haver efeitos de flexão, pelo fato de a transmissão de esforços ocorrer de forma excêntrica em relação aos eixos geométricos dos corpos, mas isso pode ser considerado um efeito de segunda ordem). Sabe-se, contudo, que as teorias de elasticidade acerca de barras afirmam que esforços de flexão têm efeito muito mais significativo em termos de deformação nessas estruturas do que os esforços cortantes e normais, ou seja, nessas cadeias, o efeito de deformação mais significativo observado será a deformação por flexão dos corpos B_1 e B_2 , devendo os demais serem secundários em relação a este. Por outro lado, na cadeia PPaP, é desprezível a transmissão de esforços em outra direção que não

seja a do atuador da junta prismática ativa. Neste direção, contudo, nota-se que é aquela na qual esta cadeia apresenta-se estruturalmente mais rígida, não sendo feita a consideração de elasticidade nos membros dessa cadeia. Portanto, a inclusão de efeitos de elasticidade a parâmetros concentrados considerando a presença apenas de molas equivalentes à flexão dos corpos B_1 e B_2 e posicionadas entre estes corpos e os B_3 e B_4 permite a avaliação dos principais efeitos da elasticidade na dinâmica do mecanismo, sem exigir adicional complexidade no equacionamento do mesmo, e correspondendo à mera adição de dois graus de liberdade, correspondentes a essas duas deformações adicionais permitidas.

Nota-se assim, que por alterar o número de graus de liberdade do sistema no estudo de sua dinâmica, a inclusão dos efeitos da elasticidade dos componentes necessariamente exige a elaboração de um novo modelo matemático. Diferentemente, efeitos de atrito, por exemplo, não exigem uma alteração do modelo, bastando notar neste caso que considerando nulas as constantes de proporcionalidade b entre esforços de atrito e velocidades (ou velocidades angulares), os termos que contêm os efeitos de atrito desaparecem das equações dinâmicas. Portanto, a metodologia adotada para a análise da dinâmica desse mecanismo robótico consistirá na elaboração de dois modelos matemáticos, um deles considerando todos os corpos do sistema como rígidos (ou seja, com três graus de liberdade), sendo denotado como modelo #1 e outro incluindo elasticidade a parâmetros concentrados conforme descrito nos parágrafos acima (ou seja, com cinco graus de liberdade), sendo denotado como modelo #2. Para cada um desses modelos podem ser realizadas simulações que incluam ou não efeitos de atrito, sendo possível realizar simulações de quatro naturezas conforme detalhado no esquema da figura 4.

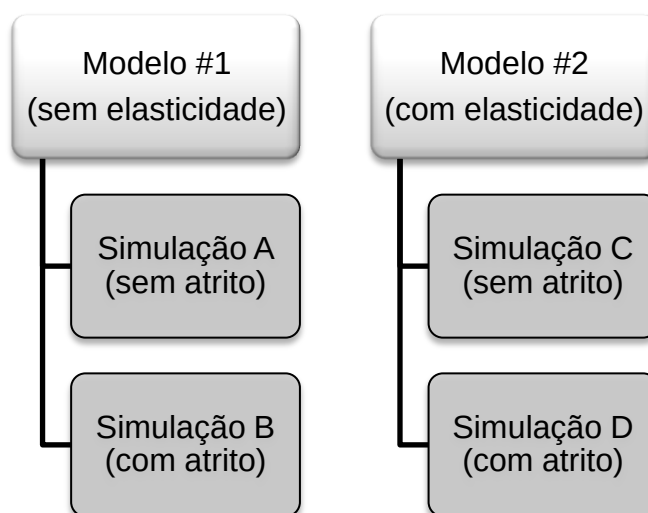


Figura 4 – Esquema de simulações que serão realizadas com os modelos dinâmicos do mecanismo

2.6 DEFINIÇÃO DE COORDENADAS

A definição das coordenadas dos modelos dinâmicos deve ser feita de forma a satisfazer os seguintes requisitos, que são extremamente convenientes para facilitar e simplificar os procedimentos de modelagem:

1. As coordenadas devem ser escolhidas de forma a tornar as expressões das matrizes de transformação homogênea o mais simples possível. A satisfação desse requisito implicará em maior simplicidade tanto nas expressões das equações vinculares quanto nas de posição, velocidade e aceleração de pontos notáveis e nas de velocidade angular e aceleração angular dos corpos.
2. Simetrias existentes no sistema devem ser exploradas para a definição de coordenadas, de tal forma que todo tipo de simetria física que existir no sistema dinâmico real automaticamente aparecerá nas equações do seu modelo matemático.

3. Corpos e pontos cujo comportamento dinâmico seja de maior interesse devem ter suas coordenadas definidas e explicitamente incluídas no modelo.
4. A definição de coordenadas deve maximizar a simplicidade das expressões matemáticas de esforços ativos, tais como esforços provenientes de atuadores, de atritos, de deformações elásticas e do campo gravitacional, de tal forma que as equações dinâmicas permaneçam o mais simples possível, reduzindo assim o esforço computacional para as simulações dos modelos.

Apesar dos critérios acima serem facilmente inteligíveis, sua aplicação não é uma tarefa simples, exigindo que algumas tentativas sejam feitas para a determinação de quais e quantas serão as coordenadas utilizadas no modelo. A opção adotada neste estudo foi a realização de uma definição de coordenadas de forma intuitiva, tomando em consideração os três primeiros critérios, o que surge como uma alternativa mais fácil, dado que a verificação da satisfação dessas condições pode ser feita diretamente nas primeiras etapas dos procedimentos de modelagem, podendo ser realizadas alterações de forma rápida e sem grandes esforços. Após esta escolha, tem-se um dado conjunto de coordenadas, que para a satisfação do quarto critério, pode simplesmente ser aumentado por meio da definição conveniente de novas coordenadas, o que evita maiores esforços.

Dessa maneira, para o modelo #1 optou-se pela escolha de um conjunto de 15 coordenadas (das quais apenas três podem efetivamente ser tratadas como independentes) e para o modelo #2 utiliza-se 17 coordenadas (das quais cinco podem efetivamente ser tratadas como independentes), sendo que as 15 primeiras coordenadas desse modelo coincidem com as utilizadas no modelo #1.

Pelo fato de o corpo mais relevante no estudo da dinâmica do mecanismo ser o seu órgão terminal (corpo B_{10} na notação da figura 2), as três primeiras

coordenadas de cada modelo serão correspondentes aos movimentos desse corpo, que apresenta três graus de liberdade translacionais.

Denotando o referencial X_0 como sendo aquele que é solidário ao corpo B_0 (base do mecanismo) e considerando o mesmo como sendo um referencial inercial, pode-se definir um sistema de coordenadas S_0 com origem no ponto P_0 que é o ponto central da guia da junta prismática entre os corpos B_0 (base) e B_9 (paralelogramo) e com eixos definidos pelos versores $\mathbf{e}_1^0$, na direção do movimento translacional nessa junta prismática e sentido para fora da página na vista da figura 5, $\mathbf{e}_2^0$ com direção e sentido do ponto P_0 para o ponto P_1 e $\mathbf{e}_3^0$ que representa a vertical descendente na vista da figura 5, de tal forma que $\mathbf{e}_3^0 = \mathbf{e}_1^0 \times \mathbf{e}_2^0$.

É conveniente ainda definir um conjunto de pontos notáveis cuja definição é fornecida na tabela 1 e cuja indicação é feita na figura 5.

Na figura 5 ainda são definidas as principais dimensões geométricas do mecanismo: a_0 é igual à distância entre os pontos P_0 e P_1 (e também entre P_0 e P_2), a_1 é a distância entre os pontos P_1 e P_3 (e também entre P_2 e P_4), a_2 é a distância entre os pontos P_5 e P_7 (e também entre P_6 e P_8), a_3 é a distância entre os pontos P_1 e P_9 e a_4 é a distância entre os pontos P_7 e P_{10} (e também entre P_8 e P_{10}).

Denotando por X_i o referencial solidário a cada corpo B_i do mecanismo ($i = 1, \dots, 10$), a estratégia adotada para a adoção das demais coordenadas consiste em definir sistemas de coordenadas S_j solidários a algum dos X_i , de tal forma que as direções dos versores $\mathbf{e}_2^j$ sejam coincidentes com os eixos de simetria principais dos corpos aos quais estes sistemas são solidários.

Para tal, definem-se as seguintes operações sobre o conjunto de todos os possíveis sistemas de coordenadas do espaço: $\mathbb{T}(\mathbf{p})[S]$ é definido como sendo o sistema de coordenadas obtido a partir de S pela translação de $\mathbf{p}$ de sua origem e mantendo sua base e $\mathbb{R}(\phi, \mathbf{e})[S]$ é definido como sendo o sistema de coordenadas obtido a partir de S pela rotação de ϕ dos seus

eixos em torno da direção definida pelo versor $\mathbf{e}$ (e no sentido positivo definido pelo mesmo) e mantendo sua origem. Com isso, define-se o conjunto de coordenadas a ser utilizado no modelo, conforme indicado na tabela 2. A tabela 3 e a figura 6 complementam a definição dessas coordenadas. As coordenadas q_{16} e q_{17} são definidas respectivamente como sendo os deslocamentos relativos entre os pontos P_5 e P_3 e entre os pontos P_6 e P_4 , sendo variáveis apenas no modelo #2 e sendo identicamente nulas no caso do modelo #1.

Tabela 1 – Definição dos pontos notáveis do modelo do mecanismo (vide figura 5)

Ponto	Definição
P_0	Ponto médio entre P_1 e P_2
P_1	Centro da junta rotativa entre os corpos B_0 (base) e B_1
P_2	Centro da junta rotativa entre os corpos B_0 (base) e B_2
P_3	Ponto solidário ao corpo B_1 e coincidente com o centro da junta rotativa entre os corpos B_1 e B_3 no estado não deformado do mecanismo
P_4	Ponto solidário ao corpo B_2 e coincidente com o centro da junta rotativa entre os corpos B_2 e B_4 no estado não deformado do mecanismo
P_5	Centro do corpo B_3
P_6	Centro do corpo B_4
P_7	Centro do corpo B_7
P_8	Centro do corpo B_8
P_9	Centro da junta prismática entre os corpos B_9 e B_{10} (solidário a B_9)
P_{10}	Ponto médio entre P_7 e P_8
P_{11}	Centro da junta prismática entre os corpos B_9 e B_{10} (solidário a B_{10})

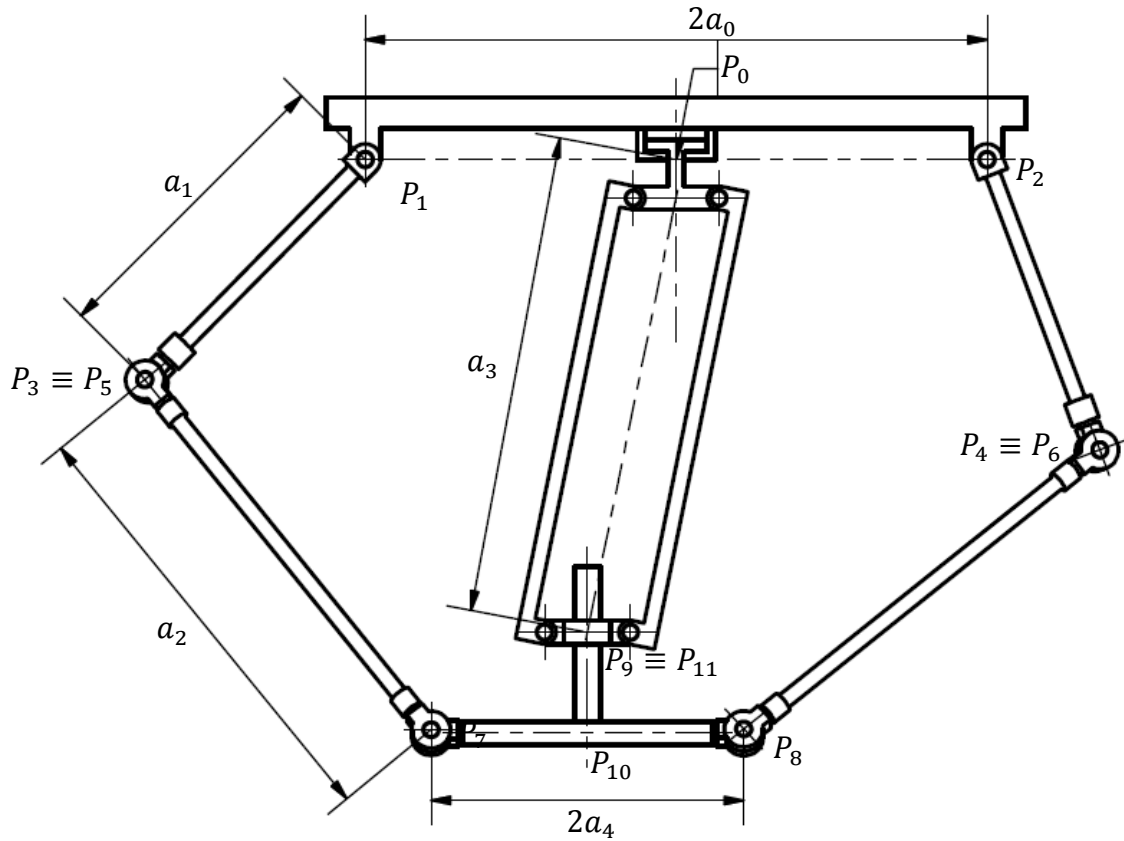


Figura 5 – Nomenclatura dos pontos notáveis e dimensões geométricas principais do mecanismo

Tabela 2 – Definição de coordenadas e de sistemas de referência utilizados no modelo

Sistema de referência	Solidário ao corpo	Definição do sistema de referência	Coordenadas definidas
S_1	B_1	$\mathbb{R}(q_4, \mathbf{e}_1^0) \circ \mathbb{T}(a_0 \mathbf{e}_2^0)[S_0]$	q_4
S_2	B_2	$\mathbb{R}(-\pi - q_5, \mathbf{e}_1^0) \circ \mathbb{T}(-a_0 \mathbf{e}_2^0)[S_0]$	q_5
S_3	B_3	$\mathbb{T}(q_{16} \mathbf{e}_3^3) \circ \mathbb{R}(q_6, \mathbf{e}_2^1) \circ \mathbb{T}(a_1 \mathbf{e}_2^1)[S_1]$	q_6, q_{16}
S_4	B_4	$\mathbb{T}(-q_{17} \mathbf{e}_3^4) \circ \mathbb{R}(-q_7, \mathbf{e}_2^2) \circ \mathbb{T}(a_1 \mathbf{e}_2^2)[S_2]$	q_7, q_{17}
S_5	B_5	$\mathbb{R}(q_8, \mathbf{e}_1^3)[S_3]$	q_8
S_6	B_6	$\mathbb{R}(-q_9, \mathbf{e}_1^4)[S_4]$	q_9
S_7	B_7	$\mathbb{R}(q_{10}, \mathbf{e}_2^0) \circ \mathbb{T}(q_1 \mathbf{e}_1^0 + (q_2 + a_4) \mathbf{e}_2^0 + q_3 \mathbf{e}_3^0)[S_0]$	q_1, q_2, q_3, q_{10}
S_8	B_8	$\mathbb{R}(-q_{11}, \mathbf{e}_2^8) \circ \mathbb{R}(-\pi, \mathbf{e}_1^0) \circ \mathbb{T}(q_1 \mathbf{e}_1^0 + (q_2 - a_4) \mathbf{e}_2^0 + q_3 \mathbf{e}_3^0)[S_0]$	q_1, q_2, q_3, q_{11}
S_9	B_5	$\mathbb{R}(-q_{12}, \mathbf{e}_1^7)[S_7]$	q_{12}
S_{10}	B_6	$\mathbb{R}(q_{13}, \mathbf{e}_1^8)[S_8]$	q_{13}
S_{11}	B_9	$\mathbb{R}(q_{14}, \mathbf{e}_1^0) \circ \mathbb{T}(q_1 \mathbf{e}_1^0)[S_0]$	q_{14}
S_{12}	B_{10}	$\mathbb{T}(q_{15} \mathbf{e}_3^{12}) \circ \mathbb{R}(-q_{14}, \mathbf{e}_1^{11}) \circ \mathbb{T}(a_3 \mathbf{e}_2^{11})[S_{11}]$	q_{14}, q_{15}
S_{13}	B_{10}	$\mathbb{T}(q_1 \mathbf{e}_1^0 + q_2 \mathbf{e}_2^0 + q_3 \mathbf{e}_3^0)[S_0]$	q_1, q_2, q_3

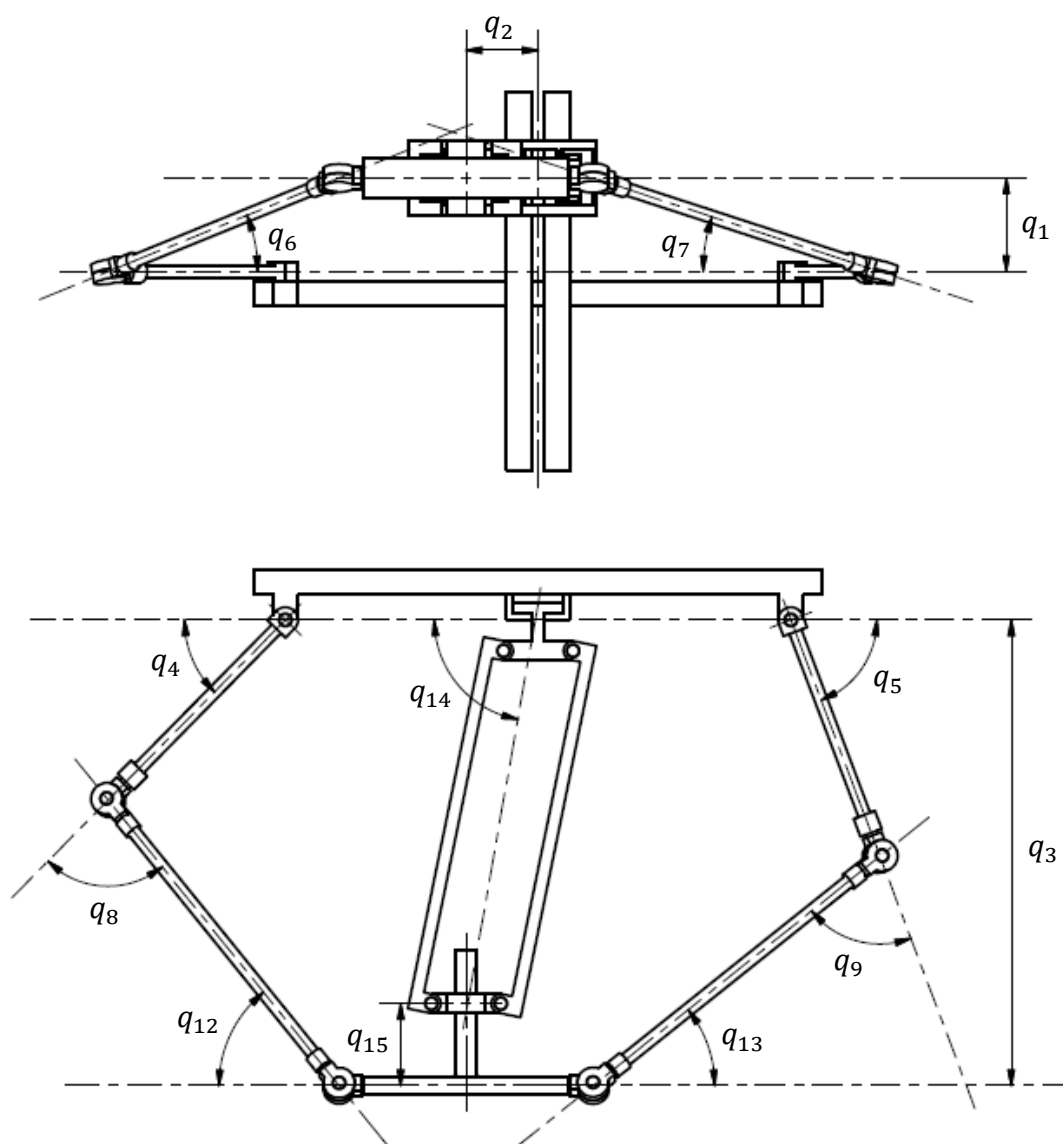


Figura 6 – Definição de coordenadas do modelo

Tabela 3 – Descrição das coordenadas definidas (vide tabela 1, tabela 2, figura 5 e figura 6)

Coordenadas	Descrição
q_1, q_2, q_3	Coordenadas do ponto P_{10} no sistema de coordenadas S_0
q_4	Ângulo formado entre a linha P_1P_3 e a linha P_1P_2
q_5	Ângulo formado entre a linha P_2P_4 e a linha P_1P_2
q_6	Ângulo de rotação do corpo B_3 em relação à B_1 (nula quando $q_1 = 0$)
q_7	Ângulo de rotação do corpo B_4 em relação à B_2 (nula quando $q_1 = 0$)
q_8	Ângulo formado entre a linha P_5P_7 e a linha P_1P_3
q_9	Ângulo formado entre a linha P_6P_8 a linha P_2P_4
q_{10}	Ângulo de rotação do corpo B_7 em relação à B_{10} (nula quando $q_1 = 0$)
q_{11}	Ângulo de rotação do corpo B_8 em relação à B_{10} (nula quando $q_1 = 0$)
q_{12}	Ângulo formado entre a linha P_7P_5 e a linha $P_{10}P_7$
q_{13}	Ângulo formado entre a linha P_8P_6 e a linha $P_{10}P_8$
q_{14}	Ângulo formado entre a projeção da linha P_0P_{11} no plano $P_0P_3P_4$ e a linha P_1P_2
q_{15}	Deslocamento translacional entre os pontos P_9 e P_{10}
q_{16}, q_{17}	Deslocamento translacional entre P_3, P_5 e P_4, P_6 respectivamente

2.7 LEVANTAMENTO DE PARÂMETROS DO MODELO

A adequada determinação dos parâmetros dos modelos é fundamental para que suas simulações produzam resultados que sejam representativos acerca do comportamento dinâmico do sistema real. Um bom modelo deve ser capaz simultaneamente de não apenas representar os efeitos observados como também de fornecer valores que possam ser comparáveis a medições realizadas em um protótipo do sistema estudado.

Em relação ao mecanismo modelado, podem-se distinguir as seguintes categorias de parâmetros:

1. Parâmetros geométricos: relativos às dimensões métricas dos corpos que constituem o mecanismo, influem diretamente tanto no estudo da cinemática quanto no da dinâmica do mecanismo.
2. Parâmetros de inércia: relativos às massas e momentos de inércia de cada um dos corpos.
3. Parâmetros de atrito: relativos às constantes de proporcionalidade entre os esforços de atrito atuantes e as velocidades ou velocidades angulares relativas entre as partes em atrito (conforme hipótese de modelagem dinâmica dos efeitos de atrito apresentada na seção 2.5).
4. Parâmetros de elasticidade: constantes de rigidez equivalentes às molas concentradas que representam a elasticidade dos corpos que compõem o mecanismo (conforme hipótese de modelagem dinâmica dos efeitos de elasticidade apresentada na seção 2.5).

Para a obtenção de todos os parâmetros, o ideal seria a realização de ensaios experimentais com um protótipo real do mecanismo, levantando-se assim todos os dados da forma mais precisa possível. Contudo, a versão final do protótipo ainda não se encontra acabada (vide figura 1b), tendo sido apenas construída a cadeia PPaP. A versão inicial do protótipo por outro lado (vide figura 1a) foi construída com uma série de adaptações que fazem com que o comportamento dinâmico desse protótipo seja bastante distinto daquele que seria observado em um mecanismo real desse tipo. Assim, não faz sentido realizar experimentos com o protótipo antigo, sendo preferível realizar experimentos com o novo protótipo em construção, obtendo todos os parâmetros possíveis para a cadeia construída e estimando os demais a partir dos parâmetros já conhecidos.

Antes de descrever os procedimentos experimentais utilizados para a medição de parâmetros na cadeia PPaP, serão apresentadas as hipóteses para estender as propriedades medidas para as demais cadeias do mecanismo. Pretende-se realizar a medição das massas de cada uma das

peças que compõem a cadeia $\underline{PPaP}$, das principais dimensões geométricas da mesma e das propriedades de atrito, por meio de um ensaio que utilize uma instrumentação apropriada para medição simultânea de velocidades e forças, permitindo a realização de correlações. Parâmetros de elasticidade não serão medidos para essa cadeia, pois por hipótese tal cadeia é considerada como sendo suficiente rígida (vide hipóteses na seção 2.5). Além disso, momentos de inércia não serão medidos, porém será feita a consideração de que, primeiramente, os sistemas de coordenadas escolhidos (vide seção 2.6) têm eixos que correspondem às direções principais de inércia de cada um dos corpos, de tal forma que a matriz de inércia em relação a eixos passantes pelos centros de massa é uma matriz diagonal. Também será considerado que corpos com pequenas dimensões (B_3 , B_4 , B_7 e B_8) possuem momentos de inércia desprezíveis (sendo tratados como massas concentradas) e que os demais corpos por possuírem formato de barras, terão momentos de inércia com relação aos seus eixos principais calculados a partir de suas massas e dimensões como se fossem barras homogêneas (ou seja, com momento de inércia desprezível em relação ao seu eixo geométrico e com momento de inércia igual a $ml^2/12$ para qualquer eixo central perpendicular ao seu eixo geométrico, com m sendo a massa desse corpo e l sendo o comprimento desse corpo na direção de seu eixo geométrico).

Quanto aos parâmetros de elasticidade, podem-se conceber os corpos B_1 e B_2 como barras engastadas aos eixos dos atuadores respectivos, uma vez que de fato, a presença desses atuadores é suficiente para garantir o controle preciso da posição de pontos desses corpos que estejam situados próximos a eles; pontos distantes dos atuadores, por outro lado, poderão ter sua posição afetada pelas deformações desses corpos, estando assim mais sensíveis aos efeitos da elasticidade. Assim, supondo que o comportamento de deformações dos corpos obedeçam ao padrão elástico linear, pode-se considerar que as deformações na extremidade desses corpos equivalem às deformações de uma mola linear com constante de rigidez igual a $k = 3EI_t/l^3$, onde E é o módulo de elasticidade do material que compõe as

barras, I_t é o momento de inércia de área na direção transversal à deformação e l é o comprimento desses corpos, desde a extremidade engastada até a extremidade livre da barra. Dessa forma, os parâmetros de elasticidade do mecanismo serão estimados de forma completamente teórica, não havendo a realização de experimentos para tal, uma vez que as cadeias correspondentes ainda não foram construídas.

As medições de massa e geometria dos componentes da cadeia PPaP serão realizadas por meio do desmonte da mesma, sendo as primeiras propriedades aferidas por meio de uma balança de pratos convencional e as últimas aferidas com o uso de trenas e réguas. Não há a necessidade de que as medidas sejam aferidas com extrema precisão, apenas deseja-se que as mesmas sejam verdadeiramente representativas, para que as simulações produzam resultados realistas. Assim sendo, considerando que os erros de medição envolvidos no uso de tais instrumentos são desprezíveis ante o nível de precisão desejados, os mesmos simplesmente não serão envolvidos nas análises aqui realizadas.

Os parâmetros de atrito que podem ser medidos na cadeia construída são: o coeficiente de atrito translacional da junta prismática $\underline{P}$ e o coeficiente de atrito rotacional equivalente às quatro juntas rotativas presentes no paralelogramo Pa. O atrito equivalente da outra junta prismática (a passiva) não pode ser aferido, pois não se consegue montar o órgão terminal neste estágio construtivo.

O primeiro ensaio, para a determinação do atrito translacional na junta prismática $\underline{P}$ pode ser realizado por meio da montagem de uma instrumentação com uma célula de carga e com um sensor do tipo LVDT (que afere deslocamentos) simultaneamente montados na cadeia, na direção da junta, conforme indicado na figura 7. Nesta figura, nota-se que a célula de carga em S está ligada em série com a haste do LVDT, estando ligada à base inferior do paralelogramo. A célula de carga em S possui ainda um dispositivo para a regulação do ganho e do offset da medição, estando

ambos os instrumentos ligados a uma placa de aquisição conectada a um computador por meio de uma entrada paralela convencional.

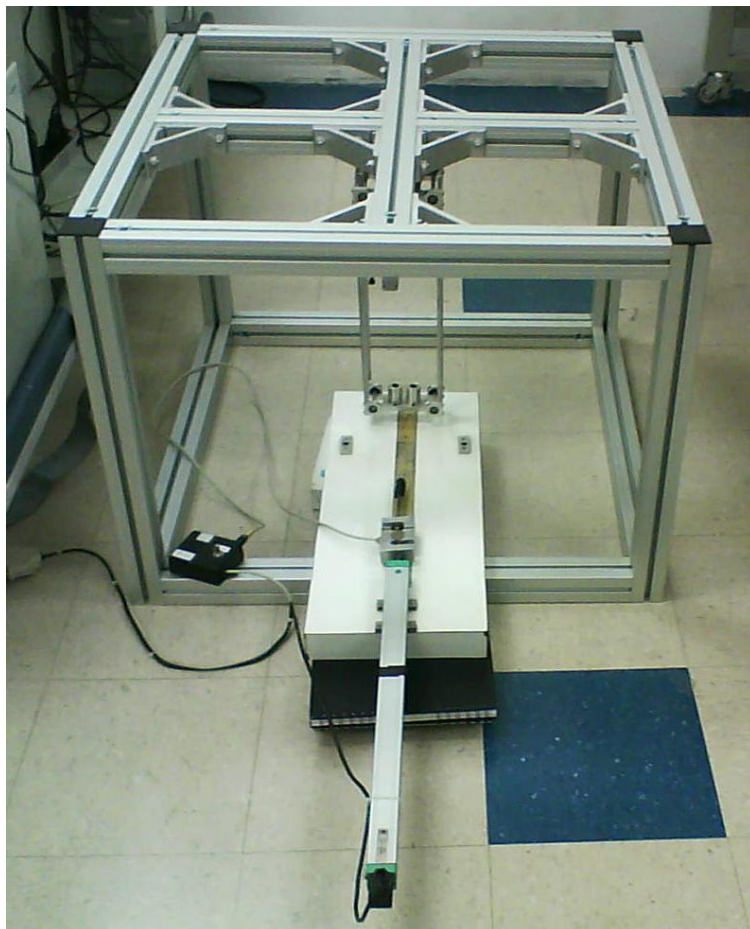


Figura 7 – Aparato experimental para a realização de ensaios para a determinação das propriedades de atrito da junta prismática ativa do mecanismo

Como o atuador não se encontra montado neste mecanismo, o ensaio pode ser realizado por meio da movimentação translacional dessa cadeia do mecanismo de forma manual e de maneira a tentar manter a velocidade aproximadamente constante (dado que a hipótese que se deseja comprovar é a proporcionalidade entre a força de atrito e a velocidade de translação relativa entre os corpos componentes da junta). Os dados têm sua aquisição e gravação realizadas por meio de um programa instalado no computador e denominado DaqView. As gravações são realizadas em arquivos de texto (.txt) que podem facilmente ser exportados para outros programas para o tratamento adequado, como por exemplo o Microsoft Excel. A metodologia

dos procedimentos realizados é a seguinte: seleciona-se um tempo de aquisição adequado (por exemplo 10 s) com um número elevado de pontos aferidos por segundo (adota-se o padrão do programa de 1000 aquisições por segundo) e dentro de cada procedimento realiza-se um movimento translacional que procure manter a velocidade aproximadamente constante. Quando for feito o tratamento de dados, escolhe-se para cada medição apenas um intervalo de tempo no qual a medida do LVDT indique que a velocidade foi aproximadamente constante de fato, trabalhando-se apenas com estes pontos. Mede-se então o coeficiente de regressão linear (inclinação de reta que melhor ajusta os pontos experimentais) para as medições do LVDT e a média dentre as medições de força da célula de carga. Finalmente, por meio das adequadas calibrações tanto do LVDT quanto da célula de carga, converte-se os valores de tensão aferidos para as grandezas efetivamente desejadas (deslocamentos e forças) e realiza-se a correlação entre o coeficiente de regressão linear dos deslocamentos (que representa a velocidade de translação) e o valor médio das forças de atrito aferidas para cada procedimento de medição, verificando-se assim a proporcionalidade desejada entre forças de atrito e velocidades relativas, e determinando-se o melhor coeficiente de ajuste.

Para a medição dos parâmetros de atrito relativos às quatro juntas rotativas do paralelogramo passivo, pode-se aproveitar o fato de o mesmo individualmente constituir um sistema do tipo pêndulo, ausente de excitação externa. Neste caso, a única forma de dissipação de energia possível é o atrito das juntas do mesmo. Dessa forma, modelando-se o comportamento dinâmico deste pêndulo, pode-se, por meio do conhecimento do tempo que o sistema leva para dissipar um dado montante de energia mecânica estimar o coeficiente de atrito de todas as juntas rotativas (supõe-se adicionalmente que todas são idênticas entre si, por simetria, respondendo cada uma por uma parcela idêntica da energia dissipada). Através dessa propriedade, pode-se propor o seguinte ensaio experimental para a determinação das propriedades de atrito do mecanismo: delimitam-se dois pontos de referência de posição para o mecanismo de tal forma que tais pontos correspondam a

diferentes energias potenciais gravitacionais da cadeia; demarcam-se esses pontos de maneira adequada para que fiquem facilmente visualizáveis ao longo de todo o ensaio; desloca-se o mecanismo para o ponto de maior energia potencial dentre estes dois e solta-se o mesmo permitindo-se o movimento pendular e iniciando-se a contagem de tempo que só é parada quando o mecanismo mostra-se incapaz de sequer chegar ao outro ponto demarcado, o de menor potencial. Como as energias potenciais do mecanismo em ambos os pontos são conhecidas, pode-se dizer que o tempo medido é o tempo necessário para o atrito dissipar a diferença de energia potencial entre as duas posições. Ajustando-se isso ao modelo do movimento pendular do mecanismo com atrito proporcional à velocidade angular relativa entre as partes, obtêm-se os valores dos coeficientes de atrito para cada junta.

Quanto às demais juntas do mecanismo, cuja medição de propriedades de atrito não pode ser realizada por conta da não existência ainda de tais peças no protótipo será suposto que todas as juntas rotativas possuem o mesmo coeficiente de atrito que cada junta rotativa do paralelogramo e que cada junta prismática possui o mesmo coeficiente de atrito da junta prismática aferida (ou seja, faz-se uma hipótese de simetria entre os elementos de dissipação de energia).

2.8 LINEARIZAÇÃO DE EQUAÇÕES DINÂMICAS

As teorias mais difundidas de controle, sejam de controle clássico ou de controle moderno, baseiam sua metodologia de síntese de controladores em modelos dinâmicos matemáticos constituídos por equações diferenciais ordinárias (cuja integração permite determinar a resposta dinâmica do sistema às entradas de controle e perturbação a ele impostas). Contudo, as

teorias mais comuns baseiam os processos de síntese em modelos nos quais as equações dinâmicas são lineares.

Cabe aqui observar um conceito importante das teorias de controle que é o conceito de variáveis de estado. Segundo a obra de Bernard Friedland [9]: O estado de um sistema dinâmico é um conjunto de grandezas físicas cuja especificação (na ausência de excitação externa) é capaz de determinar completamente a evolução do sistema. Segundo a teoria de controle moderno, um sistema dinâmico linear pode ter a derivada temporal de seu estado determinada como uma combinação linear do estado atual e das variáveis de entrada (que podem ser entradas de controle ou de perturbação). Dessa forma, denotando por $\mathbf{x}$ o vetor de estados de um sistema dinâmico, $\dot{\mathbf{x}}$ como sendo sua derivada temporal e $\mathbf{v}$ como o vetor de entradas, conforme discutido, devem existir duas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ (que podem inclusive depender explicitamente do tempo) tais que:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bv} \quad (8)$$

Outra concepção da teoria de controle é o denominado controle digital, no qual os sistemas são tratados como sendo discretos, mesmo que não sejam, pois o controlador sintetizado é discreto. Tal teoria além de ser mais moderna, ainda abrange controladores melhores, cuja síntese pode ser mais fácil, barata e viável do que a de um controlador analógico. No caso de um sistema dinâmico discreto, as equações que descrevem a evolução do estado do sistema são as denominadas equações de diferenças, nas quais o estado atual é uma função do estado imediatamente anterior e das entradas ocorridas no instante imediatamente anterior. Em particular, para um sistema discreto linear, o estado de um instante $k + 1$, $\mathbf{x}_{k+1}$, é concebido como sendo uma combinação linear do estado no instante k , $\mathbf{x}_k$, com as entradas do sistema no instante k , $\mathbf{v}_k$. Dito de outra forma, devem existir duas matrizes $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ (que podem inclusive ser dependentes exclusivamente do instante k) tais que:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}_k + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k \quad (9)$$

Deve-se notar, contudo que, mesmo que um sistema não seja naturalmente considerado discreto, suas equações dinâmicas podem ser discretizadas, ou seja, existem métodos matemáticos que permitem aproximar equações diferenciais por equações de diferenças, bastando para isso que se escolha um intervalo temporal de discretização que seja adequado para o estudo de todos os aspectos relevantes do modelo original.

Possuindo equações dinâmicas diferenciais lineares na forma (8) ou discretas lineares na forma (9), as teorias de controle apresentam uma série de metodologias que permitem sintetizar controladores de forma bastante metódica e simples a partir desses modelos. Não somente isso, como também uma série de softwares utilizados para simulações matemáticas, tais como Scilab, Matlab e Octave, por exemplo, possuem uma série de pacotes prontos para a síntese de controladores de sistemas dinâmicos lineares e para sua simulação (uma breve descrição das características de cada um desses softwares é feita no Apêndice B).

Dessa maneira, se justifica a importância da obtenção de uma forma linearizada das equações dinâmicas do modelo estudado para que primeiras aplicações práticas do mesmo possam ser executadas. De forma geral, são desejadas algumas boas características para tais modelos linearizados, dentre as principais vale destacar: precisão de resultados (capacidade de produzir, apesar de sua maior simplicidade, resultados com uma qualidade o mais próximo possível da realidade³) e redução de complexidade do modelo (com formas linearizadas as equações de vínculo se tornam extremamente

³ A primeira forma de verificar a qualidade do modelo linearizado é a comparação entre os resultados obtidos pelos modelos linear ou não-linear, ou seja, à medida que o modelo não-linear for capaz de fornecer uma boa descrição do sistema real, e os resultados produzidos pelo modelo linear forem próximos deste, pode-se dizer que o modelo linearizado tem boa precisão de resultados.

simples, havendo assim a possibilidade de eliminar coordenadas adicionais e redundantes, definidas com o intuito de simplificar o equacionamento não-linear original, de tal forma que se por um lado os modelos lineares tenham menor precisão na previsão de resultados, por outro, representam um equacionamento que tem uma simulação mais simples e rápida).

De forma geral, para um sistema mecânico que possa ser modelado segundo as metodologias apresentadas neste estudo, o conhecimento das coordenadas generalizadas q_i ($i = 1, \dots, n$) e das velocidades generalizadas⁴ u_i ($i = 1, \dots, n$) é suficiente para a determinação do estado de tais sistemas. Em particular, se existe o desejo de se linearizar as equações dinâmicas desse sistema em torno de um estado que corresponda a $q_i = q_i^*$ e $u_i = u_i^*$ ($i = 1, \dots, n$), pode-se realizar a seguinte mudança de variáveis nas equações dinâmicas: $\mathbf{q} = \mathbf{q}^* + \delta\mathbf{q}$ e $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \delta\mathbf{u}$. Conforme demonstrado na seção A.3 do Apêndice A, se dentre as n coordenadas q_i forem escolhidas p coordenadas independentes (onde p é o número de graus de liberdade do sistema) e se tais coordenadas forem denotadas como θ_r ($r = 1, \dots, p$), então existe uma matriz $\boldsymbol{\beta}$ dependente das n coordenadas q_i e do tempo tal que $\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\beta}\dot{\boldsymbol{\theta}}$. Dessa forma, pela própria definição matemática de diferenciação, pode-se dizer que para pequenas variações em relação ao estado no qual a linearização está sendo realizada é válida a seguinte aproximação: $\delta\mathbf{q} = \boldsymbol{\beta}^*\delta\boldsymbol{\theta}$, onde $\boldsymbol{\beta}^*$ é a matriz $\boldsymbol{\beta}$ calculada para $q_i = q_i^*$ ($i = 1, \dots, n$). Assim, também é válido considerar que $\delta\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\beta}^*\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}$ e $\delta\ddot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\beta}^*\delta\ddot{\boldsymbol{\theta}}$. Ainda, conforme discutido na seção 2.3, existe uma relação da forma $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}\mathbf{u} + \mathbf{Z}$, então é possível afirmar que $\delta\mathbf{u} = (\mathbf{W}^*)^{-1}(\boldsymbol{\beta}^*\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{Z}^*)$.

⁴ Apesar de o conceito de velocidades generalizadas ser em princípio exclusivo da metodologia de Kane, o mesmo por extensão pode também ser atribuído à metodologia de Lagrange, bastando que neste caso seja feita a restrição de que $u_i = \dot{q}_i$ quando se usa esta metodologia. Com isso, unifica-se o tratamento matemático para ambas as metodologias.

Seja ϕ uma função qualquer dos q_i e dos u_i , para $i = 1, \dots, n$. Sabe-se que a linearização $\hat{\phi}$ da função ϕ em torno de um estado no qual $q_i = q_i^*$ e por $u_i = u_i^*$ ($i = 1, \dots, n$) por polinômio de Taylor de primeira ordem pode ser dada por:

$$\hat{\phi} = \phi^* + \delta \mathbf{q}' \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}} \right)^* + \delta \mathbf{u}' \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{u}} \right)^* \quad (10)$$

Na notação desta equação, $(\cdot)^*$ indica que a função foi calculada em $q_i = q_i^*$ e $u_i = u_i^*$ ($i = 1, \dots, n$) e $(\cdot)'$ denota a operação de transposição de matrizes. Substituindo $\delta \mathbf{q} = \boldsymbol{\beta}^* \delta \boldsymbol{\theta}$ e $\delta \mathbf{u} = (\mathbf{W}^*)^{-1}(\boldsymbol{\beta}^* \delta \dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{Z}^*)$, pode-se afirmar que a forma linearizada $\hat{\phi}$ depende exclusivamente das variáveis $\delta \boldsymbol{\theta}$ e $\delta \dot{\boldsymbol{\theta}}$, o que mostra uma das principais vantagens do trabalho com forma linearizadas, que é a redução do número de variáveis do problema.

Valendo-se destes resultados, pode-se promover as linearizações das equações dinâmicas de Lagrange e de Kane, porém tais procedimentos serão distintos para estas metodologias. Os resultados finais serão, contudo, equações dinâmicas que, uma vez integradas devem produzir resultados praticamente idênticos para mesmas condições de simulação.

No caso da metodologia de Lagrange, faz-se a opção de linearizar as expressões de energia cinética, potencial e dos esforços não-conservativos generalizados antes da obtenção das equações dinâmicas. Uma vez que se obtêm tais expressões em termos dos $\delta \theta_r$ ($r = 1, \dots, p$) e de suas derivadas temporais, e como tais coordenadas são independentes entre si, o equacionamento de Lagrange não requer o uso dos multiplicadores indicados na equação (2), conduzindo a outra importante simplificação no equacionamento.

No caso da metodologia de Kane, o procedimento de linearização é aplicado às expressões de velocidades parciais não-holonômicas e velocidades angulares parciais não-holonômicas, bem como às expressões dos esforços atuantes e das forças de inércia. Após isso, quando são feitos os produtos

escalares correspondentes entre tais grandezas, os produtos de termos cruzados entre os $\delta\theta_r$ e também entre os $\delta\dot{\theta}_r$ ($r = 1, \dots, p$) são desprezados, pois uma vez que representam pequenas variações em torno do estado de linearização, tais produtos cruzados respondem por efeitos desprezíveis de segunda ordem. Algumas das expressões mais comuns utilizadas nos procedimento de linearização são apresentadas na tabela 4⁵.

Tabela 4 – Expressões utilizadas para a obtenção de equações dinâmicas linearizadas

Expressão não-linear	Forma linearizada
c_i	$c_i^* - s_i^* \delta q_i$
s_i	$s_i^* + c_i^* \delta q_i$
$c_i u_j$	$c_i^* u_j^* - s_i^* u_j^* \delta q_i + c_i^* \delta u_j$
$s_i u_j$	$s_i^* u_j^* + c_i^* u_j^* \delta q_i + s_i^* \delta u_j$
$c_r u_i u_j$	$c_r^* u_i^* u_j^* - s_r^* u_i^* u_j^* \delta q_r + c_r^* u_j^* \delta u_i + c_r^* u_i^* \delta u_j$
$s_r u_i u_j$	$s_r^* u_i^* u_j^* + c_r^* u_i^* u_j^* \delta q_r + s_r^* u_j^* \delta u_i + s_r^* u_i^* \delta u_j$

As formas linearizadas das equações dinâmicas podem ser escritas da seguinte maneira (se for realizada a substituição $\delta\theta = \theta - \theta^*$ e $\delta\dot{\theta} = \dot{\theta} - \dot{\theta}^*$):

$$\mathcal{M}\ddot{\theta} + \mathcal{B}\dot{\theta} + \mathcal{K}\theta = \mathcal{F} + \mathbf{E}^* \tau \quad (11)$$

Nesta forma $\mathcal{M}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{K}$ são matrizes quadradas de ordem igual ao número de elementos das matrizes coluna θ e $\mathcal{F}$ é uma matriz coluna de mesma dimensão de θ cujos termos devem ser independentes dos θ_r ($r = 1, \dots, p$).

A partir de equações dinâmicas lineares de segunda ordem na forma (11), uma possível representação das mesmas na forma de espaço de estados, pode ser facilmente obtida tomando um vetor de estados com $2p$ variáveis cujas p primeiras componentes sejam os θ_r e cujas p últimas variáveis representem os $\dot{\theta}_r$ ($r = 1, \dots, p$). Além disso, considera-se que o vetor de

⁵ Neste texto será adotada a seguinte notação $c_i = \cos(q_i)$ e $s_i = \sin(q_i)$.

entradas $\mathbf{v}$ tenha $(N_\tau + p)$ componentes, as N_τ primeiras dadas pelas variáveis de controle que constituem a matriz coluna $\boldsymbol{\tau}$ e as p últimas dadas pelos elementos da matriz $\mathcal{F}$. Escolhendo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{v}$ dessa forma, as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ da representação na forma de espaço de estados, mostrada na equação (8), ficam sendo dadas por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p \times p} & \mathbb{1}_{p \times p} \\ -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K} & -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{B} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p \times N_\tau} & \mathbf{0}_{p \times p} \\ \mathcal{M}^{-1}\mathbf{E}^* & \mathcal{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

As matrizes $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ da representação na forma de espaço de estados discreta, dada na equação (9), podem ser obtidas por procedimentos analíticos ou numéricos. No caso do presente estudo, optou-se por fazer essa obtenção por meio de discretização numérica utilizando funções próprias do Scilab.

3 RESULTADOS E ANÁLISES

Este capítulo se destina a mostrar os principais resultados obtidos acerca do estudo da dinâmica do mecanismo robótico paralelo assimétrico mediante a aplicação da metodologia descrita e desenvolvida no capítulo anterior. Os resultados são apresentados, analisados e discutidos, obtendo-se conclusões acerca da relevância de cada efeito dinâmico considerado no comportamento real do mecanismo.

3.1 TRANSFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS E EQUAÇÕES VINCULARES

A partir das definições de coordenadas e sistemas de referência feitas na seção 2.6, podem-se obter expressões de algumas transformações homogêneas relevantes para a análise que serão utilizadas para o estudo da cinemática do mecanismo conforme descrito na seção 2. As principais transformações homogêneas utilizadas no estudo do modelo são apresentadas na tabela 5. Note que nestas expressões aparecem as coordenadas q_{16} e q_{17} que estão presentes apenas no modelo #2. Contudo tais transformações são igualmente válidas para o modelo #1, bastando considerar que no mesmo, estas coordenadas são permanentemente nulas.

As equações vinculares, que determinam as relações entre as coordenadas devem ser em número iguais à diferença entre o número de coordenadas utilizados no modelo e o número de graus de liberdade do mesmo. Como no modelo #1 tem-se $n = 15$ e $p = 3$, e no modelo #2, tem-se $n = 17$ e $p = 5$, então, em ambos os casos tem-se a necessidade de se utilizar 12 equações vinculares. Dessa forma, novamente pode-se dizer que as equações vinculares do modelo #2 podem ser aproveitadas para o modelo #1,

bastando para isso considerar que no último as coordenadas q_{16} e q_{17} sejam permanentemente nulas.

Considerando que ${}^{S_5}\mathbf{p}^{P_7} = [0 \ a_2 \ 0 \ 1]'$ e ${}^{S_{13}}\mathbf{p}^{P_7} = [0 \ a_4 \ 0 \ 1]'$, pode-se então afirmar que ${}^{S_0}\mathbf{T}^{S_5}\mathbf{p}^{P_7} = {}^{S_0}\mathbf{T}^{S_{13}}\mathbf{p}^{P_7}$; também ${}^{S_6}\mathbf{p}^{P_8} = [0 \ a_2 \ 0 \ 1]'$ e ${}^{S_{13}}\mathbf{p}^{P_8} = [0 \ -a_4 \ 0 \ 1]'$ e daí ${}^{S_0}\mathbf{T}^{S_6}\mathbf{p}^{P_8} = {}^{S_0}\mathbf{T}^{S_{13}}\mathbf{p}^{P_8}$; analogamente, ${}^{S_3}\mathbf{p}^{P_5} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]'$ e ${}^{S_9}\mathbf{p}^{P_5} = [0 \ a_2 \ 0 \ 1]'$ logo, ${}^{S_0}\mathbf{T}^{S_9}\mathbf{p}^{P_5} = {}^{S_0}\mathbf{T}^{S_3}\mathbf{p}^{P_5}$ e ainda, ${}^{S_4}\mathbf{p}^{P_6} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]'$ e ${}^{S_{10}}\mathbf{p}^{P_6} = [0 \ a_2 \ 0 \ 1]'$ logo, ${}^{S_0}\mathbf{T}^{S_{10}}\mathbf{p}^{P_6} = {}^{S_0}\mathbf{T}^{S_4}\mathbf{p}^{P_6}$; finalmente, tem-se ${}^{S_{12}}\mathbf{p}^{P_{10}} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]'$ e ${}^{S_{13}}\mathbf{p}^{P_{10}} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]'$ e, portanto, ${}^{S_0}\mathbf{T}^{S_{12}}\mathbf{p}^{P_{10}} = {}^{S_0}\mathbf{T}^{S_{13}}\mathbf{p}^{P_{10}}$. Cada uma dessas igualdades conduz a três equações, havendo 15 no total, dentre as quais devem-se escolher 12 independentes para utilizar como equações vinculares.

As doze equações vinculares utilizadas para correlacionar as coordenadas dos modelos #1 e #2 são (os desenvolvimentos das expressões são feitos com o auxílio do software Wolfram Mathematica 7.0):

$$\begin{aligned}
 f_1(\mathbf{q}) &= q_1 - s_6(s_8a_2 + q_{16}) = 0 \\
 f_2(\mathbf{q}) &= s_{10}s_{12}a_2 - q_1 = 0 \\
 f_3(\mathbf{q}) &= q_1 - s_7(s_9a_2 + q_{17}) = 0 \\
 f_4(\mathbf{q}) &= s_{11}s_{13}a_2 - q_1 = 0 \\
 f_5(\mathbf{q}) &= a_0 + c_4a_1 - c_{12}a_2 - a_4 - q_2 = 0 \\
 f_6(\mathbf{q}) &= -a_0 - c_5a_1 + c_{13}a_2 + a_4 - q_2 = 0 \\
 f_7(\mathbf{q}) &= -s_4(a_1 + c_8a_2) + q_3 - c_4c_6(s_8a_2 + q_{16}) = 0 \\
 f_8(\mathbf{q}) &= s_4a_1 + c_{10}s_{12}a_2 - q_3 = 0 \\
 f_9(\mathbf{q}) &= -s_5(a_1 + c_9a_2) + q_3 - c_5c_7(s_9a_2 + q_{17}) = 0 \\
 f_{10}(\mathbf{q}) &= s_5a_1 + c_{11}s_{13}a_2 - q_3 = 0 \\
 f_{11}(\mathbf{q}) &= -c_{14}a_3 + q_2 = 0 \\
 f_{12}(\mathbf{q}) &= -s_{14}a_3 + q_3 - q_{15} = 0
 \end{aligned} \tag{13}$$

O jacobiano associado é a matriz cujo elemento que ocupam a i -ésima linha e j -ésima coluna é dado pela derivada parcial de f_i em relação à coordenada q_j . Neste caso, são coordenadas do modelo #1, $q_1, \dots, q_{15}$ e do modelo #2, $q_1, \dots, q_{17}$. Por serem expressões de grande tamanho, os jacobianos não serão mostrados explicitamente neste texto.

Tabela 5 – Principais transformações homogêneas utilizadas no estudo da cinemática do mecanismo

Transf.	Expressão matricial
${}^{S_0}_{S_5}\mathbf{T}$	$\begin{bmatrix} c_6 & s_6 s_8 & c_8 s_6 & s_6 q_{16} \\ s_4 s_6 & c_4 c_8 - c_6 s_4 s_8 & -c_6 c_8 s_4 - c_4 s_8 & a_0 + c_4 a_1 - c_6 s_4 q_{16} \\ -c_4 s_6 & c_8 s_4 + c_4 c_6 s_8 & c_4 c_6 c_8 - s_4 s_8 & s_4 a_1 + c_4 c_6 q_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
${}^{S_0}_{S_6}\mathbf{T}$	$\begin{bmatrix} c_7 & s_7 s_9 & -c_9 s_7 & s_7 q_{17} \\ -s_5 s_7 & c_7 s_5 s_9 - c_5 c_9 & -c_7 c_9 s_5 - c_5 s_9 & -a_0 - c_5 a_1 + c_7 s_5 q_{17} \\ -c_5 s_7 & c_9 s_5 + c_5 c_7 s_9 & s_5 s_9 - c_5 c_7 c_9 & s_5 a_1 + c_5 c_7 q_{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
${}^{S_0}_{S_9}\mathbf{T}$	$\begin{bmatrix} c_{10} & -s_{10} s_{12} & c_{12} s_{10} & q_1 \\ 0 & c_{12} & s_{12} & a_4 + q_2 \\ -s_{10} & -c_{10} s_{12} & c_{10} c_{12} & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
${}^{S_0}_{S_{10}}\mathbf{T}$	$\begin{bmatrix} c_{11} & -s_{11} s_{13} & -c_{13} s_{11} & q_1 \\ 0 & -c_{13} & s_{13} & q_2 - a_4 \\ -s_{11} & -c_{11} s_{13} & -c_{11} c_{13} & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
${}^{S_0}_{S_{12}}\mathbf{T}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_{14} a_3 \\ 0 & 0 & 1 & s_{14} a_3 + q_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
${}^{S_0}_{S_{13}}\mathbf{T}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3.2 EXPRESSÕES DE VELOCIDADES E VELOCIDADES ANGULARES

A partir da definição dos sistemas de coordenadas feita na seção 2.6 e das expressões das transformações homogêneas na seção anterior, pode-se aplicar a metodologia explicitada na seção A.2 do Apêndice A para a determinação das velocidades angulares a partir das expressões das matrizes de mudança de base ${}_{s_j}^{s_i}\mathbf{R}$, conforme mostrado na tabela 6. Ainda, aplicando às expressões obtidas a transformação $\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\beta}\dot{\boldsymbol{\theta}}$ descrita na seção A.3 do Apêndice A, pela definição de velocidade angular parcial não-holonômica dada pela equação (54) na seção A.5 do Apêndice A com $u_r = \dot{\theta}_r$ ($r = 1, \dots, p$), obtêm-se as expressões para as velocidades angulares parciais não-holonômicas de todos os corpos do mecanismo conforme fornecido na tabela 7.

Tabela 6 – Velocidades angulares dos corpos que compõem o mecanismo

Velocidade angular	j	$\mathbf{e}_1^j$	$\mathbf{e}_2^j$	$\mathbf{e}_3^j$
${}^{X_0}\boldsymbol{\omega}^{X_1}$	1	$\dot{q}_4$	0	0
${}^{X_0}\boldsymbol{\omega}^{X_2}$	2	$-\dot{q}_5$	0	0
${}^{X_0}\boldsymbol{\omega}^{X_3}$	3	$c_6\dot{q}_4$	$\dot{q}_6$	$s_6\dot{q}_4$
${}^{X_0}\boldsymbol{\omega}^{X_4}$	4	$-c_7\dot{q}_5$	$-\dot{q}_7$	$s_7\dot{q}_5$
${}^{X_0}\boldsymbol{\omega}^{X_5}$	9	$-\dot{q}_{12}$	$c_{12}\dot{q}_{10}$	$s_{12}\dot{q}_{10}$
${}^{X_0}\boldsymbol{\omega}^{X_6}$	10	$\dot{q}_{13}$	$-c_{13}\dot{q}_{11}$	$s_{13}\dot{q}_{11}$
${}^{X_0}\boldsymbol{\omega}^{X_7}$	7	0	$\dot{q}_{10}$	0
${}^{X_0}\boldsymbol{\omega}^{X_8}$	8	0	$-\dot{q}_{11}$	0
${}^{X_0}\boldsymbol{\omega}^{X_9}$	11	$\dot{q}_{14}$	0	0
${}^{X_0}\boldsymbol{\omega}^{X_{10}}$	13	0	0	0

Tabela 7 – Velocidades angulares parciais não-holonômicas de cada corpo do mecanismo
($p = 3$ para o modelo #1 e $p = 5$ para o modelo #2)

Velocidade angular parcial ($r = 1, \dots, p$)	j	$\mathbf{e}_1^j$	$\mathbf{e}_2^j$	$\mathbf{e}_3^j$
${}^{X_0}\boldsymbol{\omega}_r^{X_1}$	1	$\beta_{4,r}$	0	0
${}^{X_0}\boldsymbol{\omega}_r^{X_2}$	2	$-\beta_{5,r}$	0	0
${}^{X_0}\boldsymbol{\omega}_r^{X_3}$	3	$c_6\beta_{4,r}$	$\beta_{6,r}$	$s_6\beta_{4,r}$
${}^{X_0}\boldsymbol{\omega}_r^{X_4}$	4	$-c_7\beta_{5,r}$	$-\beta_{7,r}$	$s_7\beta_{5,r}$
${}^{X_0}\boldsymbol{\omega}_r^{X_5}$	9	$-\beta_{12,r}$	$c_{12}\beta_{10,r}$	$s_{12}\beta_{10,r}$
${}^{X_0}\boldsymbol{\omega}_r^{X_6}$	10	$\beta_{13,r}$	$-c_{13}\beta_{11,r}$	$s_{13}\beta_{11,r}$
${}^{X_0}\boldsymbol{\omega}_r^{X_7}$	7	0	$\beta_{10,r}$	0
${}^{X_0}\boldsymbol{\omega}_r^{X_8}$	8	0	$-\beta_{11,r}$	0
${}^{X_0}\boldsymbol{\omega}_r^{X_9}$	11	$\beta_{14,r}$	0	0

As expressões das velocidades e acelerações de pontos notáveis podem ser calculadas diretamente a partir das derivadas temporais (primeira e segunda) das expressões genéricas, em função das coordenadas dos modelos, das posições desses pontos com relação ao ponto P_0 que é solidário ao referencial X_0 (considerado como sendo um referencial inercial neste estudo). Tais expressões de posição são fornecidas na tabela 8. As expressões apresentadas são escritas para o modelo #2, podendo ser usadas para o modelo #1 bastando considerar identicamente nulas as coordenadas q_{16} e q_{17} .

Tabela 8 – Expressões de vetores posição de pontos notáveis do mecanismo

	Vetor posição	$\mathbf{e}_1^0$	$\mathbf{e}_2^0$	$\mathbf{e}_3^0$
B_1^*	$\mathbf{p}^{P_0 B_1^*}$ $= \frac{\mathbf{p}^{P_0 P_1} + \mathbf{p}^{P_0 P_5}}{2}$	$\frac{s_6 q_{16}}{2}$	$\frac{(2a_0 + c_4 a_1 - c_6 s_4 q_{16})}{2}$	$\frac{(s_4 a_1 + c_4 c_6 q_{16})}{2}$
B_2^*	$\mathbf{p}^{P_0 B_2^*}$ $= \frac{\mathbf{p}^{P_0 P_2} + \mathbf{p}^{P_0 P_6}}{2}$	$\frac{s_7 q_{17}}{2}$	$\frac{(-2a_0 - c_5 a_1 + c_7 s_5 q_{17})}{2}$	$\frac{(s_5 a_1 + c_5 c_7 q_{17})}{2}$
B_3^*	$\mathbf{p}^{P_0 B_3^*} = \mathbf{p}^{P_0 P_5}$	$s_6 q_{16}$	$a_0 + c_4 a_1 - c_6 s_4 q_{16}$	$s_4 a_1 + c_4 c_6 q_{16}$
B_4^*	$\mathbf{p}^{P_0 B_4^*} = \mathbf{p}^{P_0 P_6}$	$s_7 q_{17}$	$-a_0 - c_5 a_1 + c_7 s_5 q_{17}$	$s_5 a_1 + c_5 c_7 q_{17}$
B_5^*	$\mathbf{p}^{P_0 B_5^*}$ $= \frac{\mathbf{p}^{P_0 P_5} + \mathbf{p}^{P_0 P_7}}{2}$	$\frac{q_1 + s_6 q_{16}}{2}$	$\frac{(a_0 + c_4 a_1 + a_4 + q_2 - c_6 s_4 q_{16})}{2}$	$\frac{(s_4 a_1 + q_3 + c_4 c_6 q_{16})}{2}$
B_6^*	$\mathbf{p}^{P_0 B_6^*}$ $= \frac{\mathbf{p}^{P_0 P_1} + \mathbf{p}^{P_0 P_8}}{2}$	$\frac{q_1 + s_7 q_{17}}{2}$	$\frac{(-a_0 - c_5 a_1 - a_4 + q_2 + c_7 s_5 q_{17})}{2}$	$\frac{(s_5 a_1 + q_3 + c_5 c_7 q_{17})}{2}$
B_7^*	$\mathbf{p}^{P_0 B_7^*} = \mathbf{p}^{P_0 P_7}$	q_1	$a_4 + q_2$	q_3
B_8^*	$\mathbf{p}^{P_0 B_8^*} = \mathbf{p}^{P_0 P_8}$	q_1	$-a_4 + q_2$	q_3
B_9^*	$\mathbf{p}^{P_0 B_9^*}$ $= \frac{\mathbf{p}^{P_0 P_{12}} + \mathbf{p}^{P_0 P_9}}{2}$	q_1	$\frac{c_{14} a_3}{2}$	$\frac{s_{14} a_3}{2}$
P_9	$\mathbf{p}^{P_0 P_9}$	q_1	q_2	$q_3 - q_{15}$
P_{10}	$\mathbf{p}^{P_0 P_{10}}$	q_1	q_2	q_3
P_{12}	$\mathbf{p}^{P_0 P_{12}}$	q_1	0	0

As velocidades parciais não-holonômicas do mecanismo, podem ser obtidas então aplicando a transformação $\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\beta} \dot{\boldsymbol{\theta}}$ descrita na seção A.3 do Apêndice A considerando sua definição dada pela equação (54) na seção A.5 do Apêndice A quando se faz $u_r = \dot{\theta}_r$ ($r = 1, \dots, p$). Tais expressões são apresentadas na tabela 9 e são dadas para o modelo #2, sendo igualmente válidas para o modelo #1, bastando que para isso seja feita a consideração de que neste modelo q_{16} , q_{17} , $\beta_{16,r}$ e $\beta_{17,r}$ ($r = 1, 2, 3$) são identicamente nulas.

Tabela 9 – Velocidades parciais não-holonômicas de pontos notáveis

Vel. Parcial	Componentes	
$x_0 \bar{\mathbf{v}}_r^{B_1^*}$	$\frac{1}{2}(c_6 q_{16} \beta_{6,r} + s_6 \beta_{16,r})$	$\mathbf{e}_1^0$
	$\frac{1}{2}(q_{16}(-c_4 c_6 \beta_{4,r} + s_4 s_6 \beta_{6,r}) - s_4(a_1 \beta_{4,r} + c_6 \beta_{16,r}))$	$\mathbf{e}_2^0$
	$\frac{1}{2}(-q_{16}(c_6 s_4 \beta_{4,r} + c_4 s_6 \beta_{6,r}) + c_4(a_1 \beta_{4,r} + c_6 \beta_{16,r}))$	$\mathbf{e}_3^0$
$x_0 \bar{\mathbf{v}}_r^{B_2^*}$	$\frac{1}{2}(c_7 q_{17} \beta_{7,r} + s_7 \beta_{17,r})$	$\mathbf{e}_1^0$
	$\frac{1}{2}(q_{17}(c_5 c_7 \beta_{5,r} - s_5 s_7 \beta_{7,r}) + s_5(a_1 \beta_{5,r} + c_7 \beta_{17,r}))$	$\mathbf{e}_2^0$
	$\frac{1}{2}(-q_{17}(c_7 s_5 \beta_{5,r} + c_5 s_7 \beta_{7,r}) + c_5(a_1 \beta_{5,r} + c_7 \beta_{17,r}))$	$\mathbf{e}_3^0$
$x_0 \bar{\mathbf{v}}_r^{B_3^*}$	$c_6 q_{16} \beta_{6,r} + s_6 \beta_{16,r}$	$\mathbf{e}_1^0$
	$q_{16}(-c_4 c_6 \beta_{4,r} + s_4 s_6 \beta_{6,r}) - s_4(a_1 \beta_{4,r} + c_6 \beta_{16,r})$	$\mathbf{e}_2^0$
	$-q_{16}(c_6 s_4 \beta_{4,r} + c_4 s_6 \beta_{6,r}) + c_4(a_1 \beta_{4,r} + c_6 \beta_{16,r})$	$\mathbf{e}_3^0$
$x_0 \bar{\mathbf{v}}_r^{B_4^*}$	$c_7 q_{17} \beta_{7,r} + s_7 \beta_{17,r}$	$\mathbf{e}_1^0$
	$q_{17}(c_5 c_7 \beta_{5,r} - s_5 s_7 \beta_{7,r}) + s_5(a_1 \beta_{5,r} + c_7 \beta_{17,r})$	$\mathbf{e}_2^0$
	$-q_{17}(c_7 s_5 \beta_{5,r} + c_5 s_7 \beta_{7,r}) + c_5(a_1 \beta_{5,r} + c_7 \beta_{17,r})$	$\mathbf{e}_3^0$
$x_0 \bar{\mathbf{v}}_r^{B_5^*}$	$\frac{1}{2}(\beta_{1,r} + c_6 q_{16} \beta_{6,r} + s_6 \beta_{16,r})$	$\mathbf{e}_1^0$
	$\frac{1}{2}(\beta_{2,r} + q_{16}(-c_4 c_6 \beta_{4,r} + s_4 s_6 \beta_{6,r}) - s_4(a_1 \beta_{4,r} + c_6 \beta_{16,r}))$	$\mathbf{e}_2^0$
	$\frac{1}{2}(\beta_{3,r} - q_{16}(c_6 s_4 \beta_{4,r} + c_4 s_6 \beta_{6,r}) + c_4(a_1 \beta_{4,r} + c_6 \beta_{16,r}))$	$\mathbf{e}_3^0$
$x_0 \bar{\mathbf{v}}_r^{B_6^*}$	$\frac{1}{2}(\beta_{1,r} + c_7 q_{17} \beta_{7,r} + s_7 \beta_{17,r})$	$\mathbf{e}_1^0$
	$\frac{1}{2}(\beta_{2,r} + q_{17}(c_5 c_7 \beta_{5,r} - s_5 s_7 \beta_{7,r}) + s_5(a_1 \beta_{5,r} + c_7 \beta_{17,r}))$	$\mathbf{e}_2^0$
	$\frac{1}{2}(\beta_{3,r} - q_{17}(c_7 s_5 \beta_{5,r} + c_5 s_7 \beta_{7,r}) + c_5(a_1 \beta_{5,r} + c_7 \beta_{17,r}))$	$\mathbf{e}_3^0$

$$\begin{aligned}
X_0 \bar{\mathbf{v}}_r^{B_7^*} &= X_0 \bar{\mathbf{v}}_r^{B_8^*} & \beta_{1,r} \mathbf{e}_1^0 + \beta_{2,r} \mathbf{e}_2^0 + \beta_{3,r} \mathbf{e}_3^0 \\
&= X_0 \bar{\mathbf{v}}_r^{B_{10}^*} \\
&X_0 \bar{\mathbf{v}}_r^{B_9^*} & \beta_{1,r} \mathbf{e}_1^0 - \frac{1}{2} s_{14} a_3 \beta_{14,r} \mathbf{e}_2^0 + \frac{1}{2} c_{14} a_3 \beta_{14,r} \mathbf{e}_3^0 \\
X_0 \bar{\mathbf{v}}_r^{P_{11}} &= X_0 \bar{\mathbf{v}}_r^{P_9} & \beta_{15,r} \mathbf{e}_3^0
\end{aligned}$$

3.3 EQUAÇÕES DINÂMICAS DE LAGRANGE – MODELO #1

Aplicando a metodologia descrita na seção 2.2 e estando auxiliado pelas equações apresentadas na seção A.4 do Apêndice A, podem-se utilizar as expressões de velocidades e velocidades angulares deduzidas na seção anterior para escrever a expressão da energia cinética em função das coordenadas generalizadas e suas derivadas. Será feita, porém, a seguinte mudança de variáveis⁶: $u_i = \dot{q}_i$ para $i = 1, \dots, n$, resultando na seguinte equação:

$$\begin{aligned}
K = \frac{1}{2} & \left(u_1^2 \mu_1 + 2(u_3(c_4 u_4 + c_5 u_5) + u_2(-s_4 u_4 + s_5 u_5)) \mu_2 + (u_2^2 + u_3^2) \mu_3 \right. \\
& + u_{14}^2 \mu_5 + u_6^2 I_{3,2} + u_4^2 (\mu_4 + I_{1,1} + c_6^2 I_{3,1} + s_6^2 I_{3,3}) + u_7^2 I_{4,2} \\
& + u_5^2 (\mu_4 + I_{2,1} + c_7^2 I_{4,1} + s_7^2 I_{4,3}) + u_{12}^2 I_{5,1} + u_{13}^2 I_{6,1} \\
& + u_{10}^2 (c_{12}^2 I_{5,2} + s_{12}^2 I_{5,3} + I_{7,2}) \\
& \left. + u_{11}^2 (c_{13}^2 I_{6,2} + s_{13}^2 I_{6,3} + I_{8,2}) \right) \quad (14)
\end{aligned}$$

Nesta equação, $I_{i,j}$ representa o momento de inércia central do corpo B_i em relação a um eixo que tem a direção j (direção de um versor de um dos

⁶ Tal mudança de variáveis não implica em nenhuma alteração na metodologia de equacionamento, nem acresce nenhum sentido físico adicional aos u_i aqui definidos. O único objetivo dessa mudança de variáveis é uniformizar a notação entre as equações dinâmicas de Lagrange e Kane.

sistemas de referencia dentre os definidos na seção 2.6 e solidário a esse corpo) e as constantes auxiliares são dadas por: $\mu_1 = \frac{1}{2}(m_2 + 2(m_3 + m_4 + 2m_6))$, $\mu_2 = \frac{1}{4}a_1m_2$, $\mu_3 = \frac{1}{2}(m_2 + 2(m_4 + 2m_6))$, $\mu_4 = \frac{1}{4}a_1^2(m_1 + m_2 + 4m_5)$, $\mu_5 = \frac{1}{4}(a_3^2m_3 + 4I_{9,1})$, $\mu_6 = I_{6,2} - I_{6,3}$, $\mu_7 = I_{6,2} + I_{8,2}$, $\mu_8 = I_{5,2} - I_{5,3}$, $\mu_9 = I_{5,2} + I_{7,2}$. As massas m_i são definidas na tabela 10.

A expressão da energia potencial, por sua vez inclui apenas os efeitos do campo gravitacional, sendo sua expressão geral dada por:

$$V = -\frac{1}{2}g(s_{14}a_3m_3 + (s_4 + s_5)a_1(m_1 + m_2 + 2m_5) + 2(m_2 + m_4 + 2m_6)q_3) \quad (15)$$

Tabela 10 – Definição das massas dos corpos que constituem o mecanismo

Massa	Definição
m_1	Massa dos corpos B_1 e B_2
m_2	Massa dos corpos B_5 e B_6
m_3	Massa do paralelogramo B_9
m_4	Massa somada do corpo B_{10} e de um objeto transportado
m_5	Massa dos corpos B_3 e B_4
m_6	Massa dos corpos B_7 e B_8

As expressões de esforços generalizados envolvem esforços de duas naturezas: os esforços provenientes de atuadores ($\mathbf{Q}_A$) e os esforços devidos ao atrito ($\mathbf{Q}_F$) de tal forma que $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_A + \mathbf{Q}_F$. A obra de Leech [7] apresenta uma metodologia simples para a determinação de $\mathbf{Q}_F$ quando as forças de atrito são de natureza linear com relação às velocidades e velocidades angulares relativas entre os corpos, como o que ocorre neste estudo. Tal metodologia consiste na definição da denominada função de dissipação de Rayleigh (D) que é dada pela metade do somatório dos

produtos das constantes de atrito b_i pelo quadrado do módulo da velocidade (ou velocidade angular) relativa à junta em que ocorre este atrito. Tendo sido calculada esta função, sabe-se que $\mathbf{Q}_F = -\partial D / \partial \dot{\mathbf{q}}$. Definindo os constantes de atrito viscoso b_i conforme indicado na tabela 11, a expressão da função de Rayleigh é dada por:

$$R = \frac{1}{2} (b_7 u_1^2 + b_1 u_4^2 + b_1 u_5^2 + b_2 u_6^2 + b_2 u_7^2 + b_3 u_8^2 + b_3 u_9^2 + b_4 u_{10}^2 + b_4 u_{11}^2 + b_5 u_{12}^2 + b_5 u_{13}^2 + 2b_6 u_{14}^2 + b_8 u_{15}^2) \quad (16)$$

Tabela 11 – Definição das constantes de atrito utilizadas no modelo

Constante	Definição
b_1	Constante de atrito nas juntas rotativas B_0B_1 e B_0B_2
b_2	Constante de atrito nas juntas rotativas B_1B_3 e B_2B_4
b_3	Constante de atrito nas juntas rotativas B_3B_5 e B_4B_6
b_4	Constante de atrito nas juntas rotativas B_7B_{10} e B_8B_{10}
b_5	Constante de atrito nas juntas rotativas B_5B_7 e B_6B_8
b_6	Constante de atrito nas juntas rotativas do paralelogramo B_9
b_7	Constante de atrito na junta prismática ativa B_0B_9
b_8	Constante de atrito na junta prismática passiva B_9B_{10}

Quanto à matriz coluna $\mathbf{Q}_A$, conforme se sabe acerca da disposição de atuadores no mecanismo, apenas existem atuadores na direção das coordenadas q_1 (atuador translacional), q_4 e q_5 (atuadores rotativos), sendo tais esforços denotados respectivamente por τ_1 (força), τ_2 e τ_3 (torques). Logo, a primeira, a quarta e a quinta linha da matriz coluna $\mathbf{Q}_A$ são dadas respectivamente por τ_1 , τ_2 e τ_3 , sendo as demais linhas identicamente nulas.

Dessa forma, a representação matricial das equações dinâmicas de Lagrange na forma indicada na equação (4) tem as matrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{h} = \mathbf{h}_I +$

$\mathbf{h}_A + \mathbf{h}_F + \mathbf{h}_V$ dadas por (apenas termos não-nulos da matriz $\mathbf{H}$, 15 x 15, são representados):

$$\begin{aligned}
 H_{1,1} &= \mu_1 & H_{2,4} &= H_{4,2} = -s_4\mu_2 & H_{3,5} &= H_{5,3} = c_5\mu_2 & H_{12,12} &= I_{5,1} \\
 H_{2,2} &= \mu_3 & H_{2,5} &= H_{5,2} = s_5\mu_2 & H_{6,6} &= I_{3,2} & H_{13,13} &= I_{6,1} \\
 H_{3,3} &= \mu_3 & H_{3,4} &= H_{4,3} = c_4\mu_2 & H_{7,7} &= I_{4,2} & H_{14,14} &= \mu_5 \\
 H_{4,4} &= I_{3,1}c_6^2 + \mu_4 + I_{1,1} + s_6^2I_{3,3} & H_{10,10} &= I_{5,2}c_{12}^2 + s_{12}^2I_{5,3} + I_{7,2} \\
 H_{5,5} &= I_{4,1}c_7^2 + \mu_4 + I_{2,1} + s_7^2I_{4,3} & H_{11,11} &= I_{6,2}c_{13}^2 + s_{13}^2I_{6,3} + I_{8,2}
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\mathbf{h}_I = \begin{bmatrix} 0 \\ (c_4u_4^2 - c_5u_5^2)\mu_2 \\ (s_4u_4^2 + s_5u_5^2)\mu_2 \\ 2c_6s_6u_4u_6(I_{3,1} - I_{3,3}) \\ 2c_7s_7u_5u_7(I_{4,1} - I_{4,3}) \\ -c_6s_6u_4^2(I_{3,1} - I_{3,3}) \\ -c_7s_7u_5^2(I_{4,1} - I_{4,3}) \\ 0 \\ 0 \\ 2c_{12}s_{12}u_{10}u_{12}(I_{5,2} - I_{5,3}) \\ 2c_{13}s_{13}u_{11}u_{13}(I_{6,2} - I_{6,3}) \\ -c_{12}s_{12}u_{10}^2(I_{5,2} - I_{5,3}) \\ -c_{13}s_{13}u_{11}^2(I_{6,2} - I_{6,3}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{h}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g(m_2 + m_4 + 2m_6) \\ \frac{1}{2}gc_4a_1(m_1 + m_2 + 2m_5) \\ \frac{1}{2}gc_5a_1(m_1 + m_2 + 2m_5) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}gc_{14}a_3m_3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\mathbf{h}_F = \begin{bmatrix} -b_7u_1 \\ 0 \\ 0 \\ -b_1u_4 \\ -b_1u_5 \\ -b_2u_6 \\ -b_2u_7 \\ -b_3u_8 \\ -b_3u_9 \\ -b_4u_{10} \\ -b_4u_{11} \\ -b_5u_{12} \\ -b_5u_{13} \\ -2b_6u_{14} \\ -b_8u_{15} \end{bmatrix} \quad \mathbf{h}_A = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.4 EQUAÇÕES DINÂMICAS DE KANE – MODELO #1

Para a utilização desta metodologia, as velocidades generalizadas serão definidas de maneira trivial, ou seja, será considerado que $u_i = \dot{q}_i$ para $i = 1, \dots, n$. Utilizando as expressões das acelerações dos centros de massa e acelerações angulares dos corpos que podem ser obtidas a partir do que foi apresentado e discutido na seção 3.2, além da descrição de metodologia da seção 2.3 e das expressões apresentadas na seção A.5 do Apêndice A, obtém-se a equação (21) para a determinação das forças de inércia generalizadas não-holonômicas ($r = 1, 2, 3$).

Além disso, considerando que os esforços de atuadores sejam dados por $\mathbf{F}_1 = \tau_1 \mathbf{e}_1^0$, $\mathbf{T}_4 = \tau_2 \mathbf{e}_1^0$ e $\mathbf{T}_5 = -\tau_3 \mathbf{e}_1^0$, e calculando as forças peso de todos os N_B corpos, bem como as forças e torques de atrito como sendo linearmente proporcionais às velocidades relativas entre os N_T pontos em contato e às velocidades angulares relativas entre os N_R corpos em rotação relativa, obtém-se que as forças ativas generalizadas ($r = 1, 2, 3$) podem ser calculadas por meio de uma expressão da forma:

$$\begin{aligned} \bar{F}_r = & \sum_{i=1}^{N_B} \left(\bar{\mathbf{v}}_r^{B_i^*} \cdot m_{B_i} g \mathbf{e}_3^0 \right) + \sum_{i=1}^{N_R} \left(\left(\bar{\boldsymbol{\omega}}_r^{X_i} - \bar{\boldsymbol{\omega}}_r^{Y_i} \right) \cdot \left(-b_{R,i}^{Y_i} \boldsymbol{\omega}^{X_i} \right) \right) \\ & + \sum_{i=1}^{N_T} \left(\left(\bar{\mathbf{v}}_r^{P_i} - \bar{\boldsymbol{\omega}}_r^{Q_i} \right) \cdot \left(-b_{T,j}^{P_i Q_i} \dot{\mathbf{p}}^{P_i Q_i} \right) \right) + \bar{\mathbf{v}}_r^{P_{12}} \cdot \mathbf{F}_1 + \bar{\boldsymbol{\omega}}_r^{B_1} \cdot \mathbf{T}_4 + \bar{\boldsymbol{\omega}}_r^{B_2} \cdot \mathbf{T}_5 \end{aligned} \quad (19)$$

Substituindo as expressões de velocidades parciais e velocidades angulares parciais não-holonômicas, obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\bar{F}_r = & -b_7 u_1 \beta_{1,r} + \tau_1 \beta_{1,r} + \tau_2 \beta_{4,r} + \tau_3 \beta_{5,r} - b_1 (u_4 \beta_{4,r} + u_5 \beta_{5,r}) \\
& - b_2 ((u_4 + u_5) \beta_{5,r} + u_6 \beta_{6,r} + u_7 \beta_{7,r}) \\
& + b_3 (-u_8 \beta_{8,r} - u_9 \beta_{9,r}) - b_4 (u_{10} \beta_{10,r} + u_{11} \beta_{11,r}) \\
& - b_5 ((c_{13} u_{10} + 2u_{11}) \beta_{11,r} + u_{12} \beta_{12,r} + u_{13} \beta_{13,r}) \\
& - 2b_6 u_{14} \beta_{14,r} \\
& + \frac{1}{2} g (2(m_4 + 2m_6) \beta_{3,r} + a_1 (m_1 + 2m_5) (c_4 \beta_{4,r} + c_5 \beta_{5,r}) \\
& + m_2 (2\beta_{3,r} + a_1 (c_4 \beta_{4,r} + c_5 \beta_{5,r})) + c_{14} a_3 m_3 \beta_{14,r}) \\
& - b_8 u_{15} \beta_{15,r}
\end{aligned} \tag{20}$$

Além disso, também tem-se que:

$$\begin{aligned}
\bar{F}_r^* = & \frac{1}{4} (-4m_3 \dot{u}_1 \beta_{1,r} - 4(m_4 + 2m_6) (\dot{u}_1 \beta_{1,r} + \dot{u}_2 \beta_{2,r} + \dot{u}_3 \beta_{3,r}) - a_1^2 (m_1 \\
& + 4m_5) (\dot{u}_4 \beta_{4,r} + \dot{u}_5 \beta_{5,r}) - m_2 (2\dot{u}_1 \beta_{1,r} + 2(\dot{u}_2 \beta_{2,r} \\
& + \dot{u}_3 \beta_{3,r}) + a_1^2 (\dot{u}_4 \beta_{4,r} + \dot{u}_5 \beta_{5,r}) - a_1 (s_4 (\dot{u}_4 \beta_{2,r} + u_4^2 \beta_{3,r} \\
& + \dot{u}_2 \beta_{4,r}) + c_4 (u_4^2 \beta_{2,r} - \dot{u}_4 \beta_{3,r} - \dot{u}_3 \beta_{4,r}) + s_5 (-\dot{u}_5 \beta_{2,r} \\
& + u_5^2 \beta_{3,r} - \dot{u}_2 \beta_{5,r}) - c_5 (u_5^2 \beta_{2,r} + \dot{u}_5 \beta_{3,r} + \dot{u}_3 \beta_{5,r}))) \\
& + 4(-\dot{u}_6 \beta_{6,r} I_{3,2} + c_6 s_6 u_4 (2u_6 \beta_{4,r} - u_4 \beta_{6,r}) (I_{3,1} - I_{3,3}) \\
& - \dot{u}_4 \beta_{4,r} (I_{1,1} + I_{3,1} + s_6^2 (-I_{3,1} + I_{3,3})) - \dot{u}_7 \beta_{7,r} I_{4,2} \\
& + c_7 s_7 u_5 (2u_7 \beta_{5,r} - u_5 \beta_{7,r}) (I_{4,1} - I_{4,3}) - \dot{u}_5 \beta_{5,r} (I_{2,1} + I_{4,1} \\
& + s_7^2 (-I_{4,1} + I_{4,3})) - \dot{u}_{12} \beta_{12,r} I_{5,1} + c_{12} s_{12} u_{10} (2u_{12} \beta_{10,r} \\
& - u_{10} \beta_{12,r}) (I_{5,2} - I_{5,3}) - \dot{u}_{13} \beta_{13,r} I_{6,1} + c_{13} s_{13} u_{11} (2u_{13} \beta_{11,r} \\
& - u_{11} \beta_{13,r}) (I_{6,2} - I_{6,3}) + \dot{u}_{10} \beta_{10,r} (-I_{5,2} + s_{12}^2 (I_{5,2} - I_{5,3}) \\
& - I_{7,2}) + \dot{u}_{11} \beta_{11,r} (-I_{6,2} + s_{13}^2 (I_{6,2} - I_{6,3}) - I_{8,2})) \\
& - \dot{u}_{14} \beta_{14,r} (a_3^2 m_3 + 4I_{9,1}))
\end{aligned} \tag{21}$$

Com essas expressões podem-se escrever as matrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{h} = \mathbf{h}_I + \mathbf{h}_A + \mathbf{h}_F + \mathbf{h}_V$ da forma matricial das equações de Kane indicada nas equações (6) e (7), com os μ_i definidos como nas equações dinâmicas de Lagrange:

$$\begin{aligned}
H_{r,1} &= -\mu_1 \beta_{1,r} \\
H_{r,2} &= \mu_2 (s_4 \beta_{4,r} - s_5 \beta_{5,r}) - \mu_3 \beta_{2,r} \\
H_{r,3} &= -\mu_2 (c_4 \beta_{4,r} + c_5 \beta_{5,r}) - \mu_3 \beta_{3,r} \\
H_{r,4} &= \mu_2 (s_4 \beta_{2,r} - c_4 \beta_{3,r}) - \beta_{4,r} (s_6^2 (I_{3,3} - I_{3,1}) + I_{1,1} + I_{3,1} + \mu_4) \\
H_{r,5} &= -\mu_2 (c_5 \beta_{3,r} + s_5 \beta_{2,r}) - \beta_{5,r} (s_7^2 (I_{4,3} - I_{4,1}) + I_{2,1} + I_{4,1} + \mu_4) \\
H_{r,6} &= -I_{3,2} \beta_{6,r} \\
H_{r,7} &= -I_{4,2} \beta_{7,r} \\
H_{r,8} &= 0 \\
H_{r,9} &= 0 \\
H_{r,10} &= \beta_{10,r} (s_{12}^2 (I_{5,2} - I_{5,3}) - I_{5,2} - I_{7,2}) \\
H_{r,11} &= \beta_{11,r} (s_{13}^2 (I_{6,2} - I_{6,3}) - I_{6,2} - I_{8,2}) \\
H_{r,12} &= -I_{5,1} \beta_{12,r} \\
H_{r,13} &= -I_{6,1} \beta_{13,r} \\
H_{r,14} &= -\mu_5 \beta_{14,r} \\
H_{r,15} &= 0
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
h_{l,r} &= \frac{1}{4} \left(-a_1 m_2 \left((c_4 u_4^2 - c_5 u_5^2) \beta_{2,r} + (s_4 u_4^2 + s_5 u_5^2) \beta_{3,r} \right) \right. \\
&\quad - 4 \left(c_6 s_6 u_4 (2u_6 \beta_{4,r} - u_4 \beta_{6,r}) (I_{3,1} - I_{3,3}) \right. \\
&\quad + c_7 s_7 u_5 (2u_7 \beta_{5,r} - u_5 \beta_{7,r}) (I_{4,1} - I_{4,3}) \\
&\quad + c_{12} s_{12} u_{10} (2u_{12} \beta_{10,r} - u_{10} \beta_{12,r}) (I_{5,2} - I_{5,3}) \\
&\quad \left. \left. + c_{13} s_{13} u_{11} (2u_{13} \beta_{11,r} - u_{11} \beta_{13,r}) (I_{6,2} - I_{6,3}) \right) \right)
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
h_{v,r} &= -\frac{1}{2} g (2(m_4 + 2m_6) \beta_{3,r} + a_1 (m_1 + 2m_5) (c_4 \beta_{4,r} + c_5 \beta_{5,r}) \\
&\quad + m_2 (2\beta_{3,r} + a_1 (c_4 \beta_{4,r} + c_5 \beta_{5,r})) + c_{14} a_3 m_3 \beta_{14,r})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{F,r} = & b_7 u_1 \beta_{1,r} + b_1 (u_4 \beta_{4,r} + u_5 \beta_{5,r}) \\
& + b_2 ((u_4 + u_5) \beta_{5,r} + u_6 \beta_{6,r} + u_7 \beta_{7,r}) \\
& - b_3 (-u_8 \beta_{8,r} - u_9 \beta_{9,r}) + b_4 (u_{10} \beta_{10,r} + u_{11} \beta_{11,r}) \\
& + b_5 ((c_{13} u_{10} + 2u_{11}) \beta_{11,r} + u_{12} \beta_{12,r} + u_{13} \beta_{13,r}) \\
& + 2b_6 u_{14} \beta_{14,r} + b_8 u_{15} \beta_{15,r} \\
\\
h_{A,r} = & -\tau_1 \beta_{1,r} - \tau_2 \beta_{4,r} - \tau_3 \beta_{5,r}
\end{aligned} \tag{23}$$

3.5 PARÂMETROS FÍSICOS DO MECANISMO

Os parâmetros geométricos fazem parte do projeto do mecanismo (sendo que os parâmetros referentes à cadeia PPaP puderam inclusive ser aferidos no protótipo construído), sendo listados na tabela 13.

As massas dos componentes do paralelogramo, corpo B_9 , foram obtidos a partir de medições em balança de pratos das partes após o desmonte desta peça. Os valores de massa aferidos são indicados na tabela 12.

Tabela 12 – Medições de massa dos componentes do paralelogramo

Item	Massa (g)
Plataforma superior	233,0
Plataforma inferior	176,7
Mancais de rolamento (8 unidades)	116,2
Lateral esquerda	136,9
Lateral direita	137,2
Parafusos principais com arruela (4 unidades)	19,2
Parafusos secundários com arruelas (16 unidades)	9,2
Total	828,4

Considerando uma proporcionalidade entre a massa do paralelogramo e suas dimensões características, e considerando que a proporcionalidade seja aproximadamente mantida para as demais peças, considera-se que cada peça com formato de barra (B_1 , B_2 , B_5 e B_6) possuem uma densidade linear de massa de 1 g/mm, ao passo que as peças de formato pontual (B_3 , B_4 , B_7 e B_8) são supostas como tendo 100 g cada aproximadamente. O órgão terminal, junto ao qual se considera uma massa carregada de cerca de 1,0 kg, pode ser suposto como tendo uma massa total de 1,4 kg. Dessa forma, tem-se os resultados mostrados na tabela 13, que serão os efetivamente adotados nas simulações realizadas.

Tabela 13 – Parâmetros de geometria e de inércia utilizados no modelo

Geometria	Dimensão (mm)	Inércia	Massa (g)
a_0	350	m_1	300
a_1	300	m_2	400
a_2	400	m_3	830
a_3	400	m_4	1400
a_4	150	m_5	100
		m_6	100

O experimento para a determinação do atrito nas juntas rotativas do paralelogramo consistiu na demarcação de dois pontos de referência em relação à posição de equilíbrio dessa cadeia quando livre (situação na qual se comporta como um pêndulo, conforme descrito na seção 2.7). O primeiro deles, que era o ponto de início do experimento, foi o mesmo para todos os ensaios, correspondendo à posição em que o paralelogramo encontrava-se rente à extremidade externa da estrutura do mecanismo. Este ponto encontrava-se a uma distância horizontal de 350 mm da posição de equilíbrio. Outros pontos de referência foram demarcados a 250 mm, 200 mm, 150 mm e 100 mm da posição de equilíbrio. O procedimento foi realizado da seguinte maneira: o mecanismo era conduzido até a primeira

referência (correspondente à máxima energia potencial gravitacional) e era solto, permitindo sua oscilação livre e contando o tempo até que o mecanismo não mais conseguisse passar pela segunda posição de referência (correspondente a uma energia potencial gravitacional menor). Os resultados desses experimentos são mostrados na tabela 14.

Tabela 14 – Resultados do experimento para a determinação do atrito nas juntas rotativas do paralelogramo

Distância horizontal do equilíbrio (mm)	Tempo (s)	Distância horizontal do equilíbrio (mm)	Tempo (s)
100	29	150	21
100	28	200	15
150	21	200	15
150	21	250	9
150	21	250	10
150	22		

Considerando que esse pêndulo fosse regido por uma equação dinâmica linear de segunda ordem em ϕ , onde ϕ é o ângulo formado pela linha que liga o ponto fixo ao centro de massa do pêndulo com a vertical, sabe-se da teoria de vibrações mecânicas (vide Den Hartog, [10]) que a razão entre as amplitudes de ϕ em um dado instante e decorrido um tempo t se relaciona com o coeficiente de amortecimento ζ (fração do amortecimento crítico do sistema) por meio da seguinte equação: $\zeta = \ln(\Phi_0/\Phi_N)/(\omega_n t)$. Como o sistema é um pêndulo, sua frequência natural pode ser dada por: $\omega_n = \sqrt{g/l}$, onde l é a distância do centro de massa ao ponto fixo do pêndulo. Considera-se que $l = a_3/2$ e que além disso $\phi = \arcsin(d_H/a_3)$, onde d_H é a distância horizontal da extremidade inferior do pêndulo com relação à vertical do equilíbrio. Assim, pode-se fazer um gráfico de $\ln(\Phi_0/\Phi_N)$ em função de t , que se prevê que seja uma reta, conforme mostrado no gráfico 1. Neste gráfico, observa-se que a regressão linear dessas grandezas

permite estimar $\omega_n \zeta = 0,0489 \text{ s}^{-1}$ e como $\omega_n = 7,004 \text{ rad/s}$, então, adota-se que $\zeta = 6,98 \cdot 10^{-3}$. Finalmente como $b_{CRIT} = 2I_{9,1}\omega_n$, e conforme citado na seção 2.7, $I_{9,1}$ pode ser estimado a partir do fato de que o paralelogramo seja formado por barras, então, $I_{9,1} = 1,937 \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2$, logo $b_{CRIT} = 0,2713 \text{ N.m.s/rad}$ e $b = \zeta b_{CRIT} = 1,89 \cdot 10^{-3} \text{ N.m.s/rad}$. Tal valor de b calculado equivale ao dobro de b_6 conforme observado nas equações dinâmicas de Lagrange e de Kane (vide seções 0 e 3.4). Dessa forma, adotam-se os parâmetros de atrito conforme indicado na tabela 17.

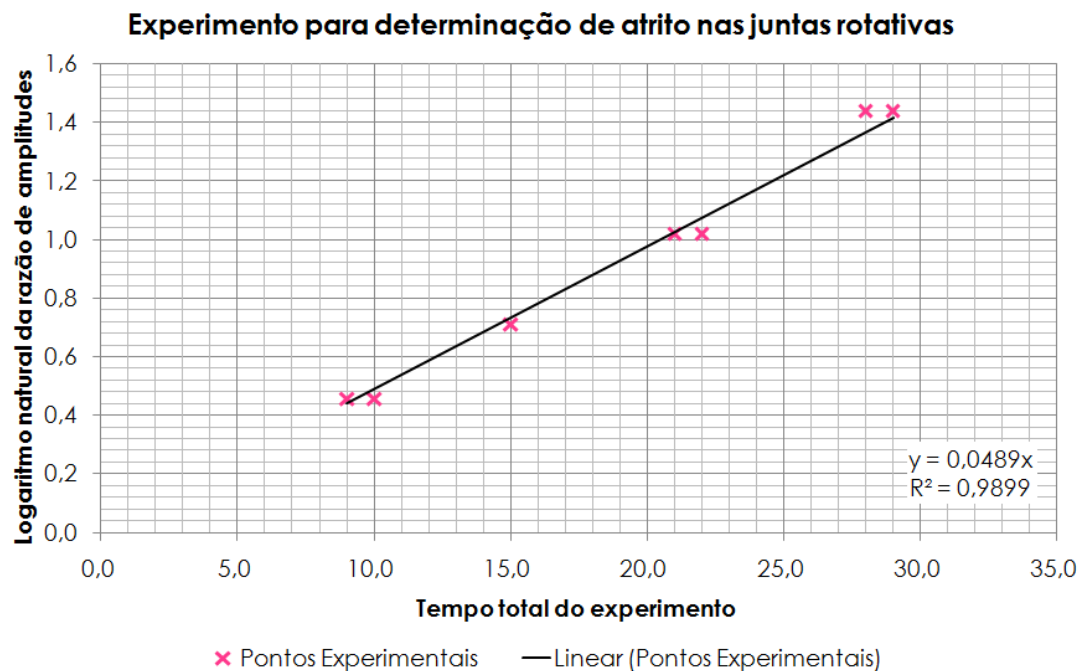


Gráfico 1 – Resultados do experimento para a determinação do atrito nas juntas rotativas do paralelogramo

Para a realização dos experimentos para a determinação da constante de atrito da junta prismática ativa, conforme descrito na seção 2.7, primeiramente é necessário promover a calibração dos instrumentos de medição de força (célula de carga em S) e de posição (LVDT), para que os valores gravados das leituras desses instrumentos (dados em volts) possam ser devidamente convertidos para unidades de medida reais das grandezas

aferidas. Os resultados dos ensaios de calibração são mostrados na tabela 15 e devidamente indicados no gráfico 2 e no gráfico 3.

Após esse procedimento de calibração, o aparato experimental foi montado conforme indicado na figura 7 (vide seção 2.7) e foram realizados procedimentos nos quais era imposto um movimento translacional à cadeia e ambos os sensores enviavam dados de medição (1000 medições por segundo) ao computador, sendo gravados em arquivos de texto (.txt) por meio do programa DaqView. Foram realizados 13 procedimentos como este. Os dados então foram importados para o programa Microsoft Office Excel 2007, onde foram construídos gráficos com os dados aferidos, conforme exemplificado pelo gráfico 4.

Tabela 15 – Pontos experimentais obtidos nos ensaios de calibração do LVDT e da célula de carga

LVDT		Célula de carga em S	
Posição (mm)	Leitura (V)	Força (N)	Leitura (V)
0	0,00	0,00	-0,22
10	0,05	0,79	0,24
20	0,15	1,10	0,3
30	0,25	1,50	0,48
50	0,46	1,92	0,6
100	0,96	2,34	0,67
150	1,47	3,04	0,89
210	1,97	3,89	1,11
250	2,48	5,02	1,41
300	2,99		
350	3,50		
400	4,01		
450	4,54		

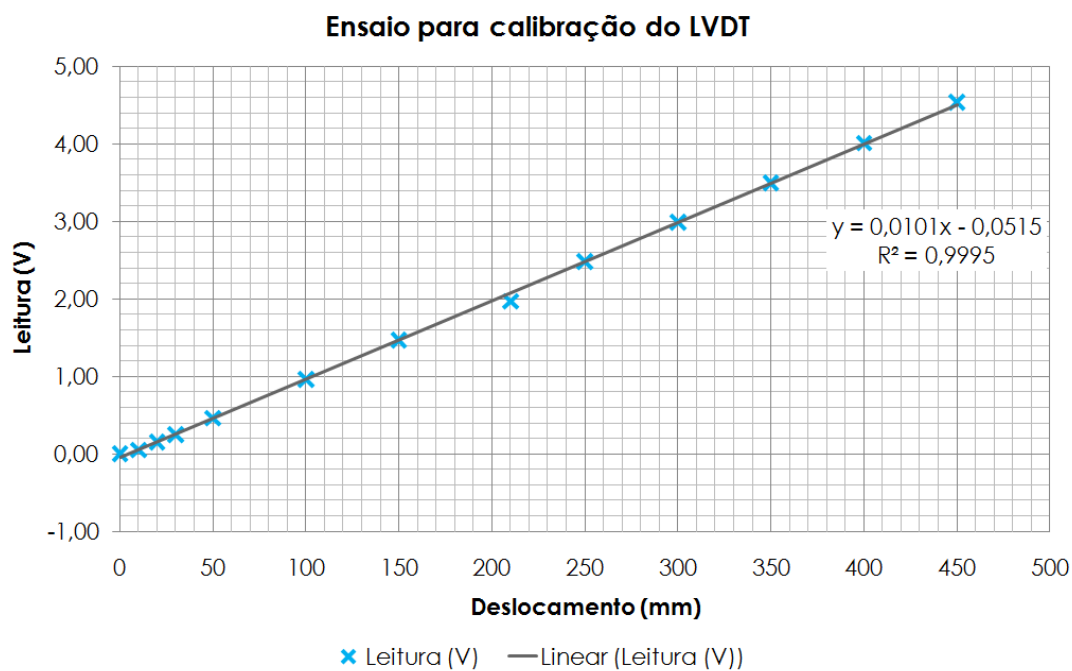


Gráfico 2 – Resultados do ensaio experimental para a calibração do LVDT

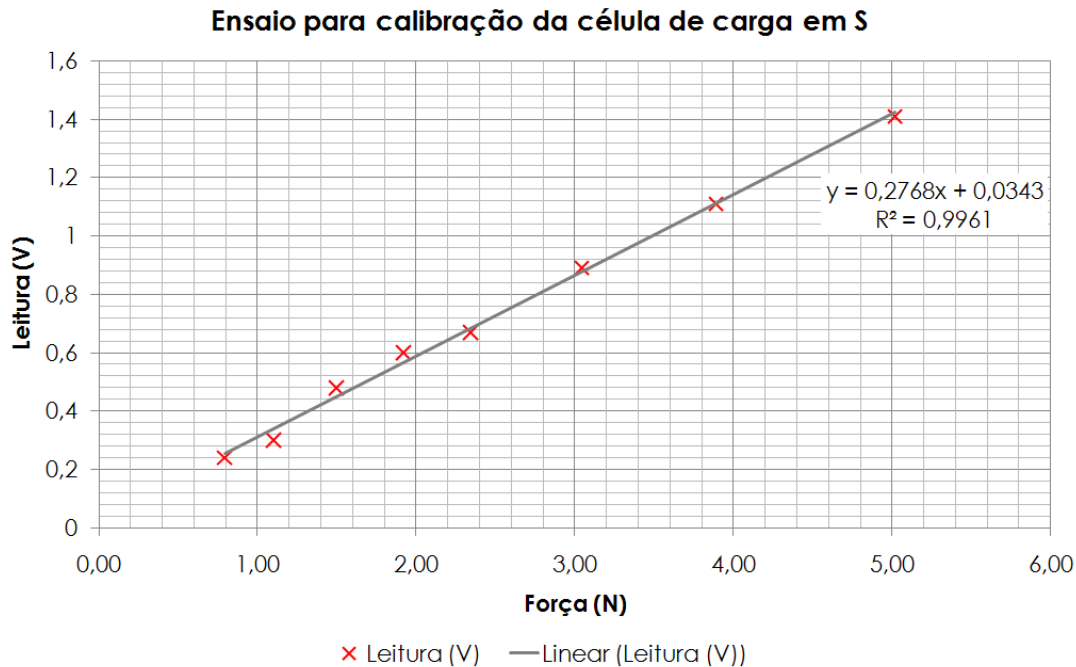


Gráfico 3 – Resultados do ensaio experimental para a calibração da célula de carga

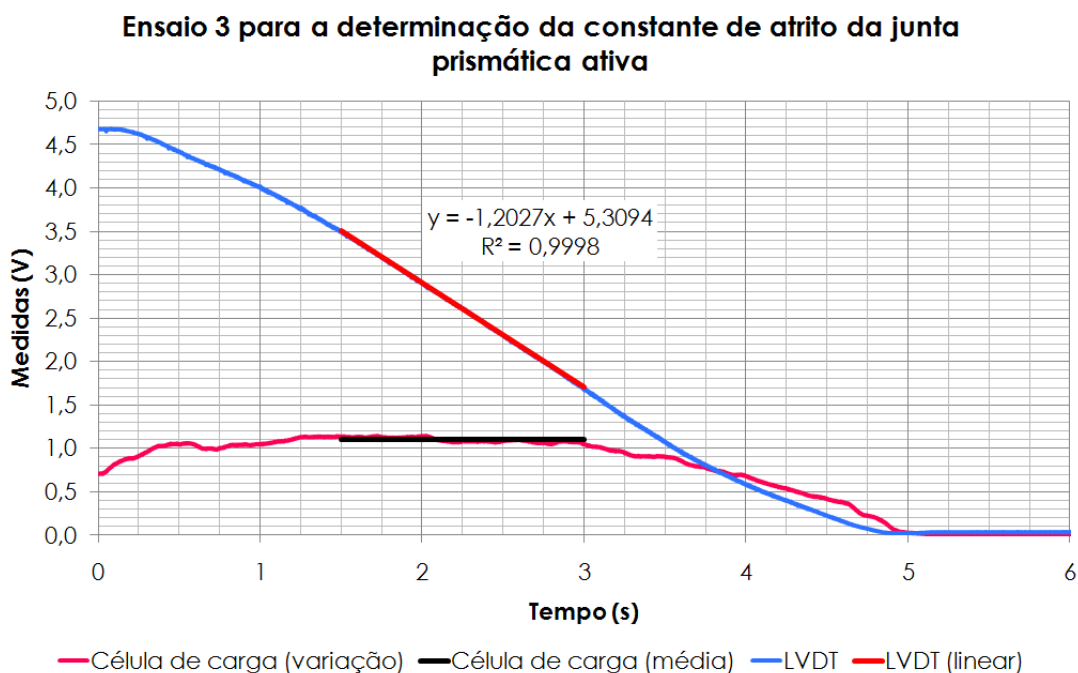


Gráfico 4 – Resultado de um dos ensaios para a determinação da constante de atrito da junta prismática ativa

Com esses gráficos, foi possível realizar a verificação dos trechos nos quais a velocidade do deslocamento era aproximadamente constante. Com isso, para cada ensaio, foram traçadas linhas de tendência lineares para a leitura do LVDT e constante (média dos valores no intervalo) para a leitura da variação de tensão na célula de carga⁷. Dessa forma, para o gráfico exemplificado tem-se: $|\Delta V_{LVDT}/\Delta t| = 1,203 \text{ V/s}$ e $|\overline{\Delta V}_{CEL}| = 1,10 \text{ V}$. Sabendo do gráfico 2, que a relação de calibração entre variações de tensão e variações de deslocamento no LVDT vale $0,0101 \text{ V/mm}$ e do gráfico 3, que a relação de calibração entre variações de tensão e variações de força na célula de carga vale $0,2768 \text{ V/N}$, obtém-se que o valor de força em função

⁷ A leitura da célula de carga é fornecida em termos de variação de tensão pelo fato de que o instrumento utilizado não possuía um dispositivo apropriado para fazer coincidir precisamente a leitura nula (em volts) com a medida de força efetivamente nula. Por isso a medição de força é efetivamente a variação da leitura em relação ao valor indicado quando os esforços são nulos.

da velocidade encontrado para este ensaio vale 3,98 N para uma velocidade de 0,12 m/s. O mesmo procedimento é repetido para os demais ensaios, sendo os resultados apresentados na tabela 16 e devidamente indicados no gráfico 5.

Tabela 16 – Resultado dos ensaios para a determinação da constante de atrito da junta prismática ativa

Velocidade (m/s)	Força (N)	Velocidade (m/s)	Força (N)
0,04	1,23	0,30	6,07
0,04	0,71	0,47	7,81
0,12	3,98	0,61	9,26
0,10	4,81	0,82	9,63
0,17	5,18	0,60	8,41
0,18	4,51	0,03	0,53
0,30	6,24		

Nota-se que o ajuste de atrito linear não deve ser o melhor para os pontos experimentais aferidos, dado que o formato da curva de tendência parece ser outro. Mesmo assim, por questões de simplicidade do modelo, o comportamento linear do atrito será mantido, sendo adotado o valor de 15 N.s/m como constante de atrito desta junta.

Dessa maneira, por meio da metodologia descrita na seção 2.7, pode-se estender os resultados dos parâmetros de atrito obtidos para o restante das juntas do mecanismo (ainda não existentes no protótipo), conforme indicado na tabela 17.

No caso do modelo #2 ainda são relevantes os parâmetros de elasticidade que serão denotados por k_1 e k_2 , correspondendo respectivamente às molas equivalentes colocadas entre os pontos P_3 , P_5 e P_4 , P_6 , respectivamente. Novamente é suposta simetria sendo, portanto, $k_1 = k_2 = 3EI_t/a_1^3$, onde $E = 210$ GPa é o módulo de elasticidade do material que compõe as barras

(suposto com sendo aço), I_t é o momento de inércia de área na direção transversal à deformação, considerado como sendo igual ao de uma seção circular de raio igual a 5 mm, ou seja, $I_t = \pi \cdot (5 \cdot 10^{-4} \text{ m})^4 / 4 = 4,91 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$, e portanto, $k_1 = k_2 = 11450 \text{ N/m}$.

Tabela 17 – Valores dos coeficientes de atrito utilizados nas simulações

Constante de atrito	Valor (N.m.s/rad)	Constante de atrito	Valor (N.s/m)
b_1	0,010	b_7	15
b_2	0,001	b_8	15
b_3	0,001		
b_4	0,001		
b_5	0,001		
b_6	0,001		

Resultado dos ensaios para a determinação da constante de atrito da junta prismática ativa

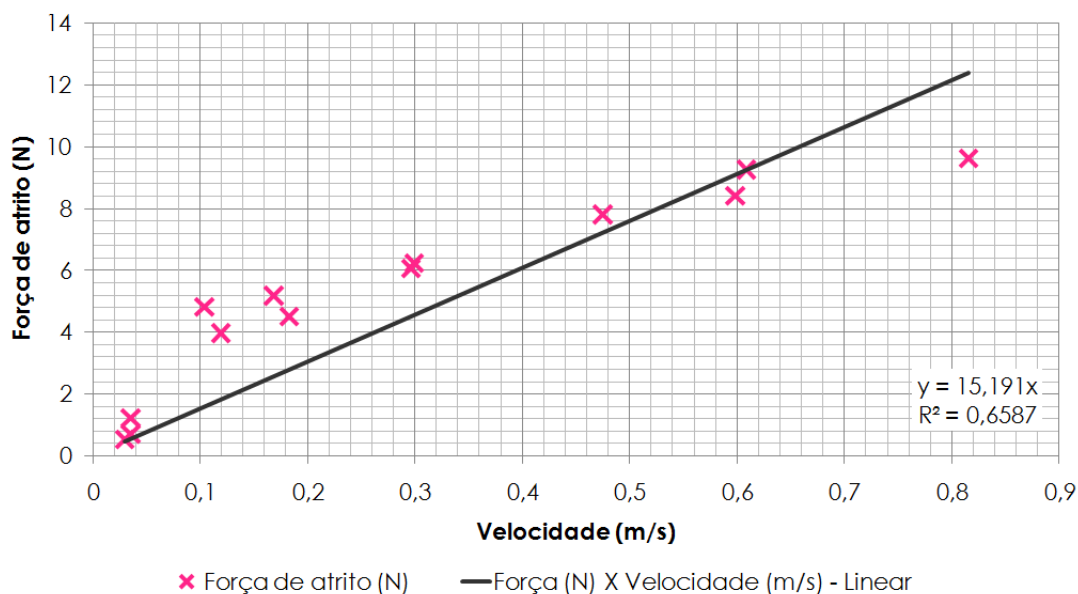


Gráfico 5 – Resultado dos ensaios para a determinação da constante de atrito da junta prismática ativa

3.6 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DE DINÂMICA INVERSA – MODELO #1

Conforme explicado nas seções 2.2 e 2.3 uma possível utilização das equações dinâmicas é calcular os esforços dos atuadores necessários para a realização de uma determinada trajetória do mecanismo a partir do conhecimento do histórico temporal completo desta trajetória, simulação denominada de dinâmica inversa. As principais utilizações dessa simulação se referem à necessidade de estimar os valores dos esforços necessários para a realização de um movimento, verificando se os mesmos são compatíveis com os atuadores que estão sendo utilizados (deve ser verificado tanto se não ocorre saturação do atuador quanto se a taxa de variação temporal dos esforços é viabilizada por esse atuador), e inclusive utilizando-os como valores de referência para a síntese de um sistema de controle para o mecanismo.

A título de exemplo serão utilizadas nas simulações numéricas, cujos resultados serão apresentados nessa seção, trajetórias retilíneas para o órgão terminal do mecanismo. Sem perda de generalidade, o instante inicial do movimento será designado por $t = t_0$ e o instante final do movimento será denotado por $t = t_1$. Ainda, deseja-se que tanto no início como no final do movimento as velocidades e acelerações do mecanismo sejam nulas, preservando assim a continuidade destas, mantendo certa suavidade no movimento. Tais condições ficam satisfeitas se, por exemplo, for adotado $\theta(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ q_3(t)]'$ tendo a seguinte expressão:

$$\theta(t) = \theta(t_0) + (\theta(t_1) - \theta(t_0)) \left(\frac{t - t_0}{t_1 - t_0} - \frac{1}{2\pi} \sin \left(2\pi \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \right) \right) \quad (24)$$

De fato, tal equação é uma forma paramétrica da equação de uma reta que passa pelos pontos $\theta(t_0)$ e $\theta(t_1)$ e ainda suas derivadas temporais primeira e segunda são nulas para $t = t_0$ e $t = t_1$. Portanto, nas simulações apresentadas a seguir, será utilizado $\theta(t)$ na forma dada em (24).

Serão propostas algumas trajetórias para simulação satisfazendo as condições das equações (24), todas com $t_1 - t_0 = 0,5$ s. Os valores das coordenadas nos instantes inicial e final de cada simulação são apresentados na tabela 18.

Tabela 18 – Pontos iniciais e finais das trajetórias utilizadas nas simulações

Trajetórias	t_0			t_1		
	q_1 (mm)	q_2 (mm)	q_3 (mm)	q_1 (mm)	q_2 (mm)	q_3 (mm)
0	0	0	450	200	-50	300
1	0	0	450	200	0	450
2	0	0	450	0	100	450
3	0	0	450	0	0	600

Construindo para a simulação uma rotina, cujas principais características são descritas no Apêndice B, pode-se utilizar as equações vinculares para a determinação do histórico temporal de todas as coordenadas do sistema e de suas derivadas temporais primeiras e segundas a partir do conhecimento de $\theta(t)$ somente (vide seção A.3 do Apêndice A para maiores detalhes) e aplicando tais históricos de coordenadas e de suas derivadas às equações dinâmicas de Lagrange (seção 0) ou de Kane (seção 3.4), obtêm-se os históricos temporais dos esforços dos atuadores através das metodologias descritas respectivamente nas seções 2.2 e 2.3.

Realizado este procedimento, são obtidos os resultados apresentados nos gráficos seguintes. Nota: simulação A0, por exemplo, indica que foi realizada uma simulação do tipo A (vide seção 2.5 e figura 4) com a trajetória 0 da tabela 18.

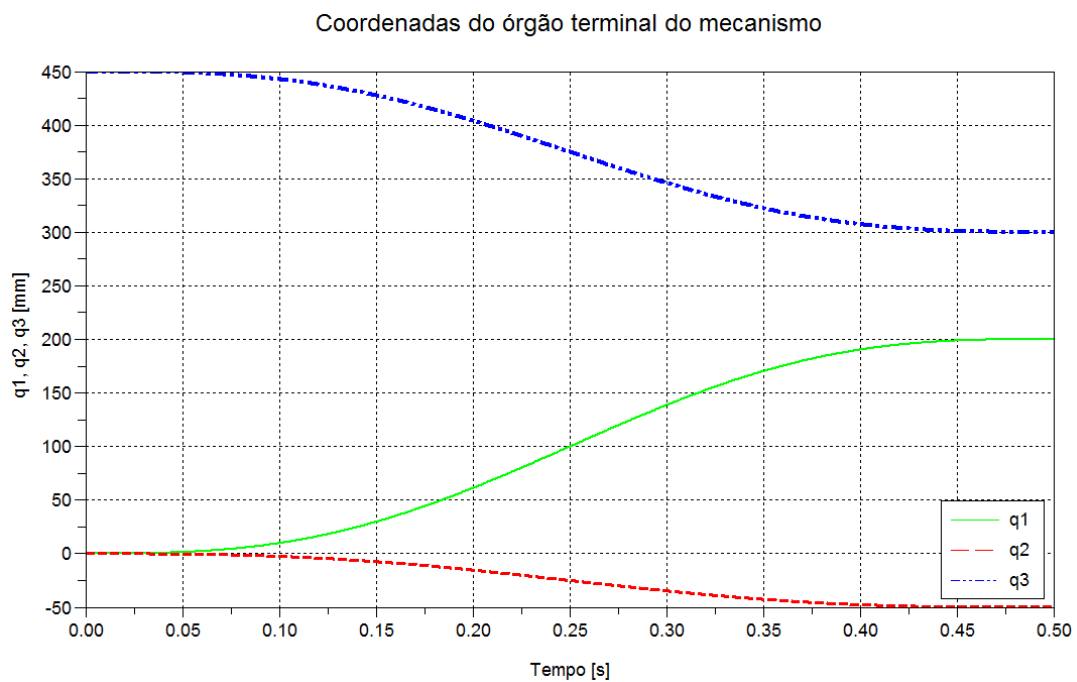


Gráfico 6 – Simulação A0: Coordenadas do órgão terminal do mecanismo

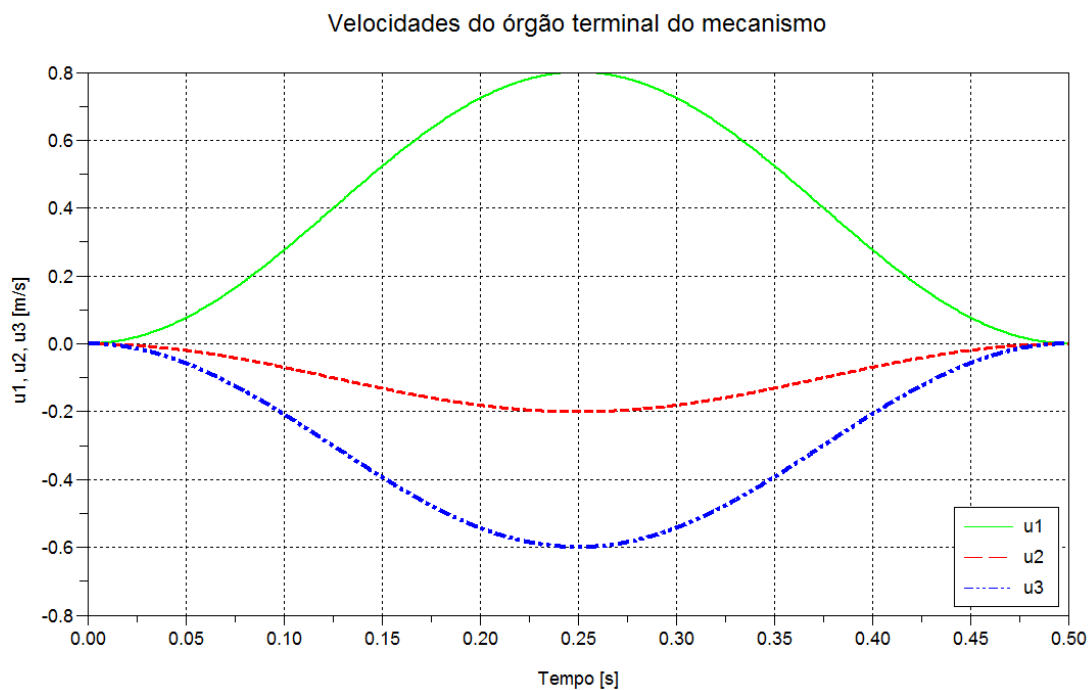


Gráfico 7 – Simulação A0: Velocidades do órgão terminal do mecanismo

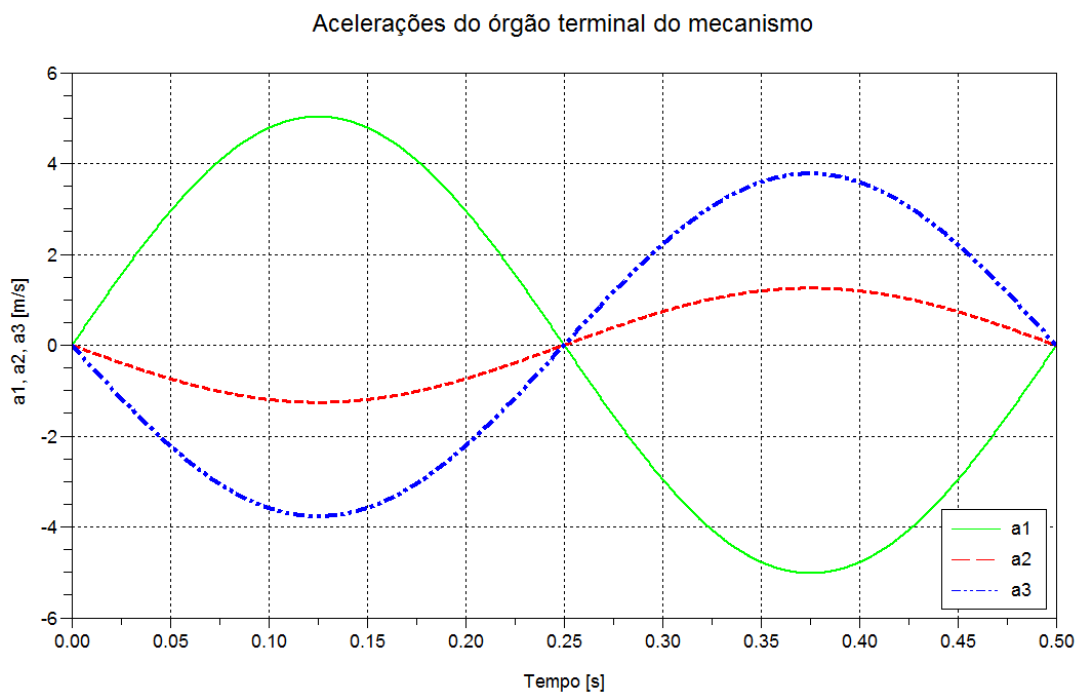


Gráfico 8 – Simulação A0: Acelerações do órgão terminal do mecanismo

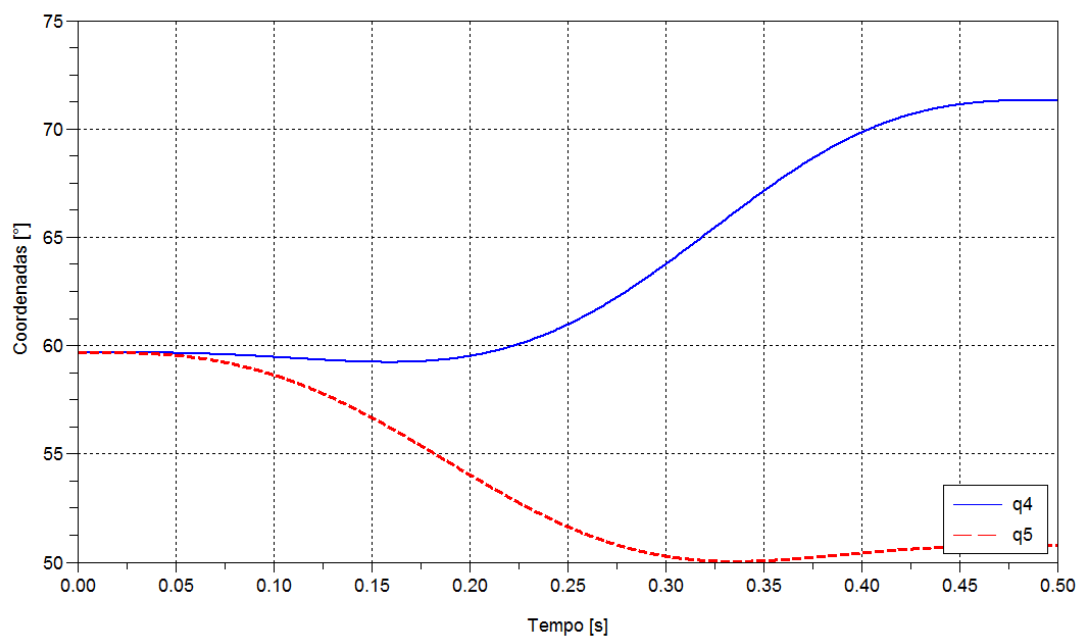


Gráfico 9 – Simulação A0: Coordenadas q_4 e q_5

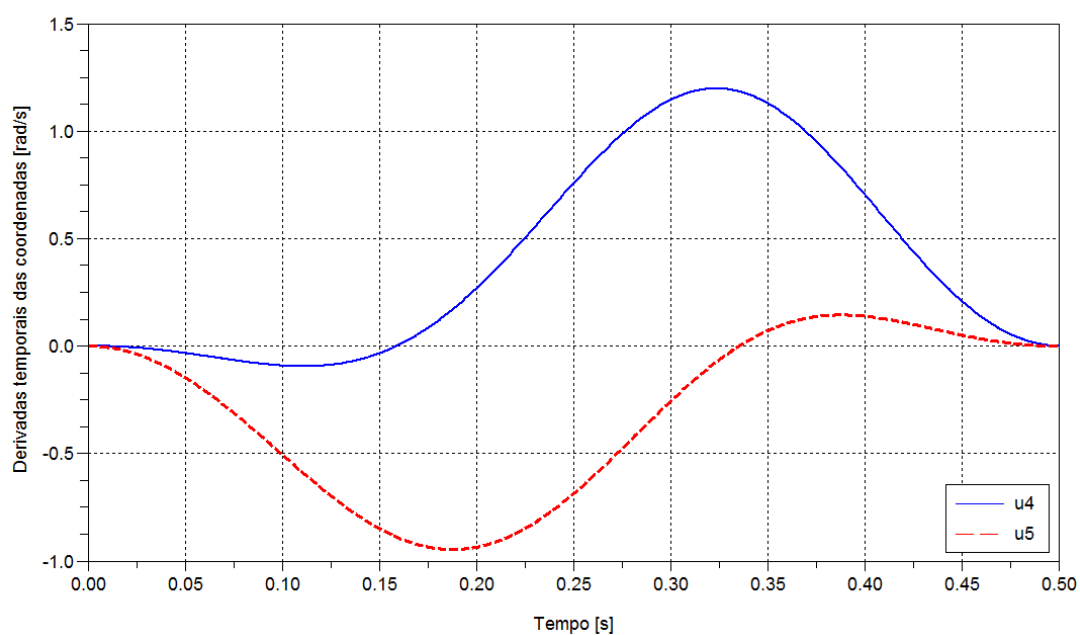


Gráfico 10 – Simulação A0: Coordenadas q_4 e q_5 (primeiras derivadas temporais)

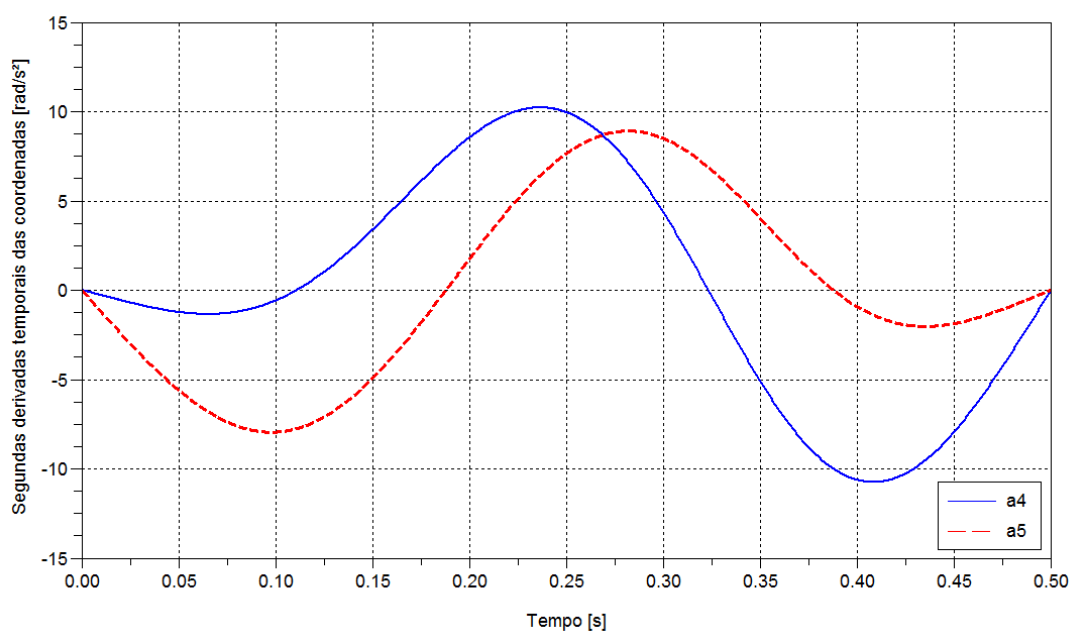
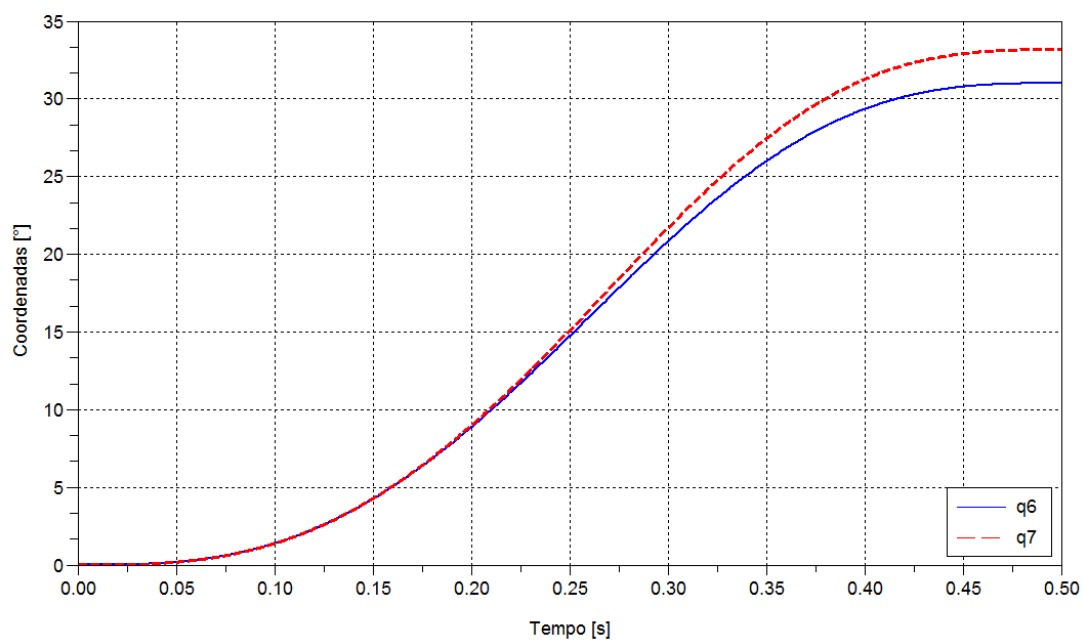
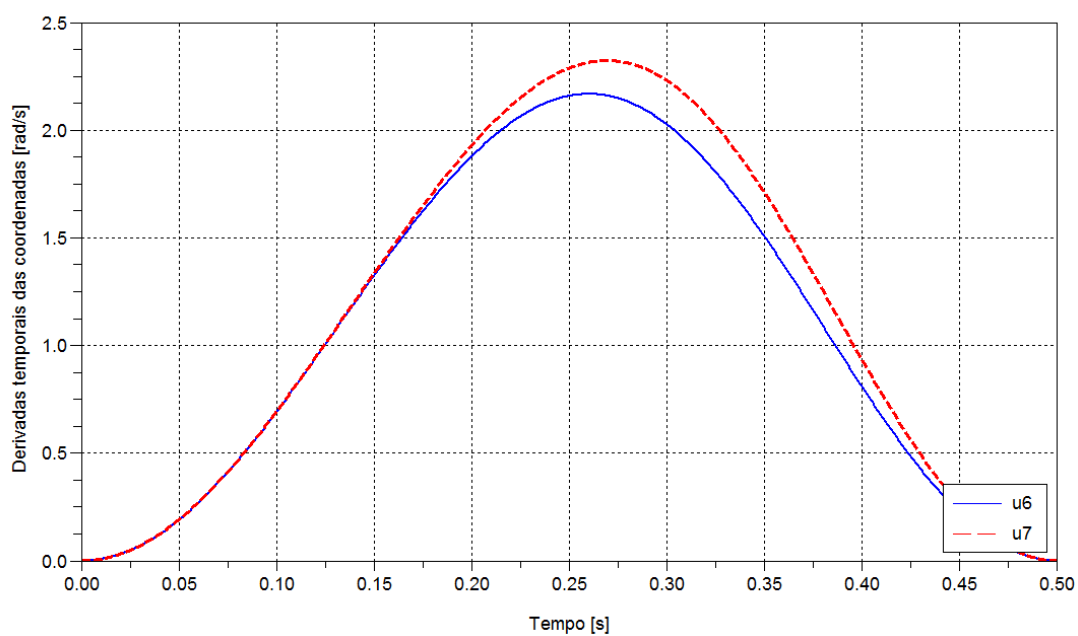


Gráfico 11 – Simulação A0: Coordenadas q_4 e q_5 (segundas derivadas temporais)

Gráfico 12 – Simulação A0: Coordenadas q_6 e q_7 Gráfico 13 – Simulação A0: Coordenadas q_6 e q_7 (primeiras derivadas temporais)

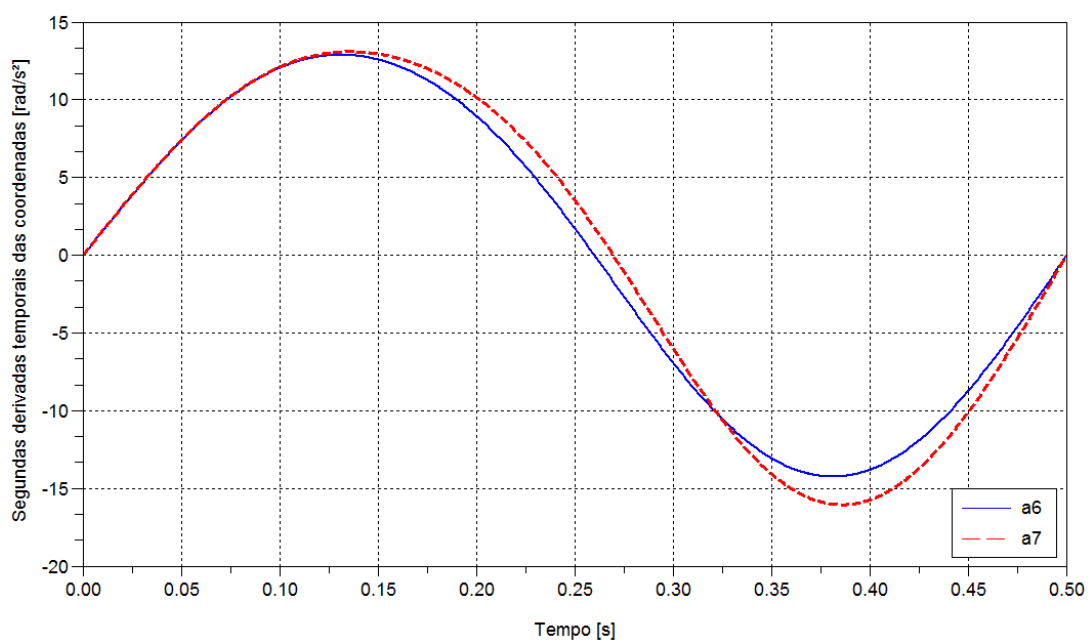


Gráfico 14 – Simulação A0: Coordenadas q_6 e q_7 (segundas derivadas temporais)

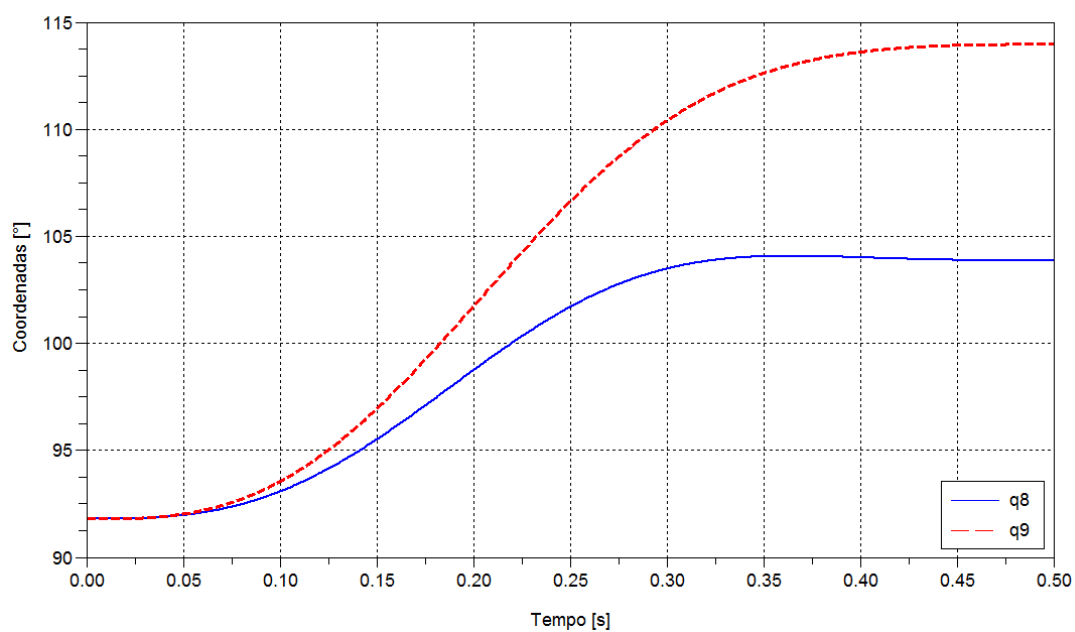


Gráfico 15 – Simulação A0: Coordenadas q_8 e q_9

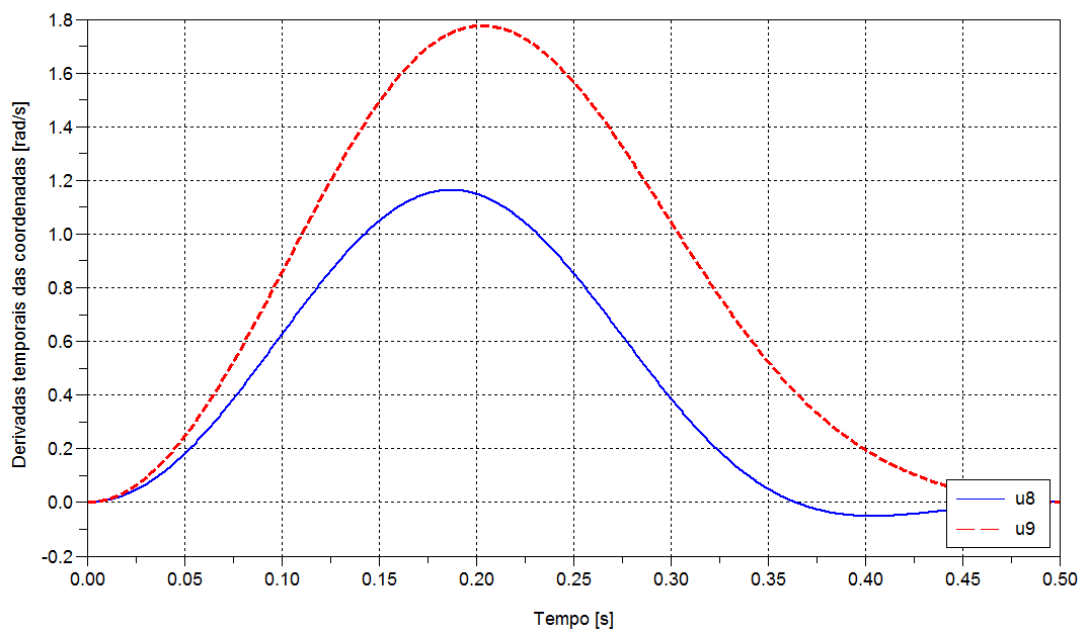


Gráfico 16 – Simulação A0: Coordenadas q_8 e q_9 (primeiras derivadas temporais)

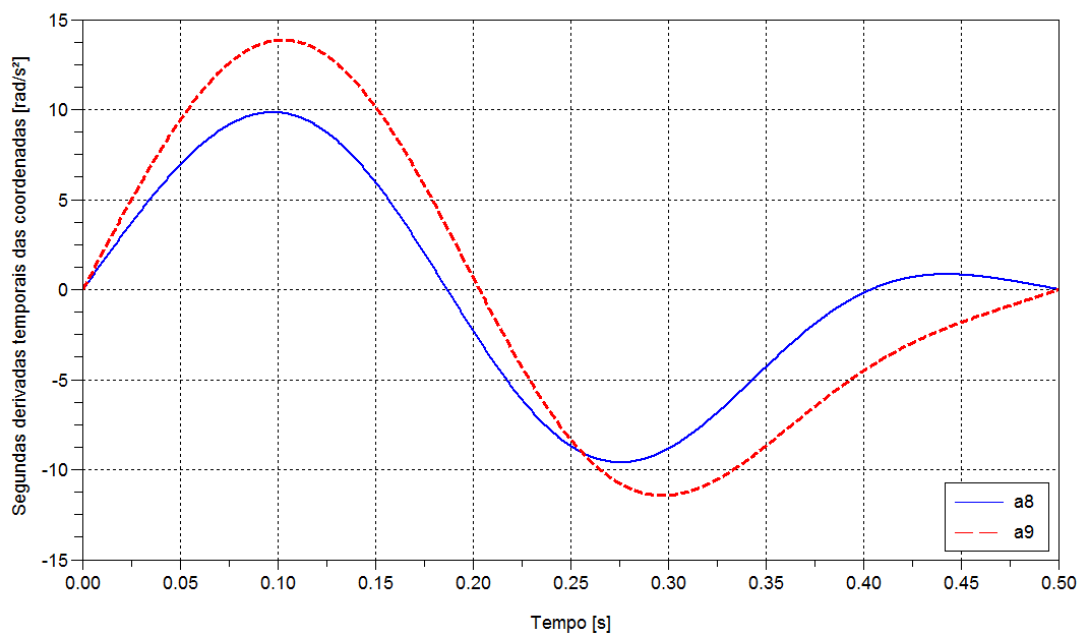


Gráfico 17 – Simulação A0: Coordenadas q_8 e q_9 (segundas derivadas temporais)

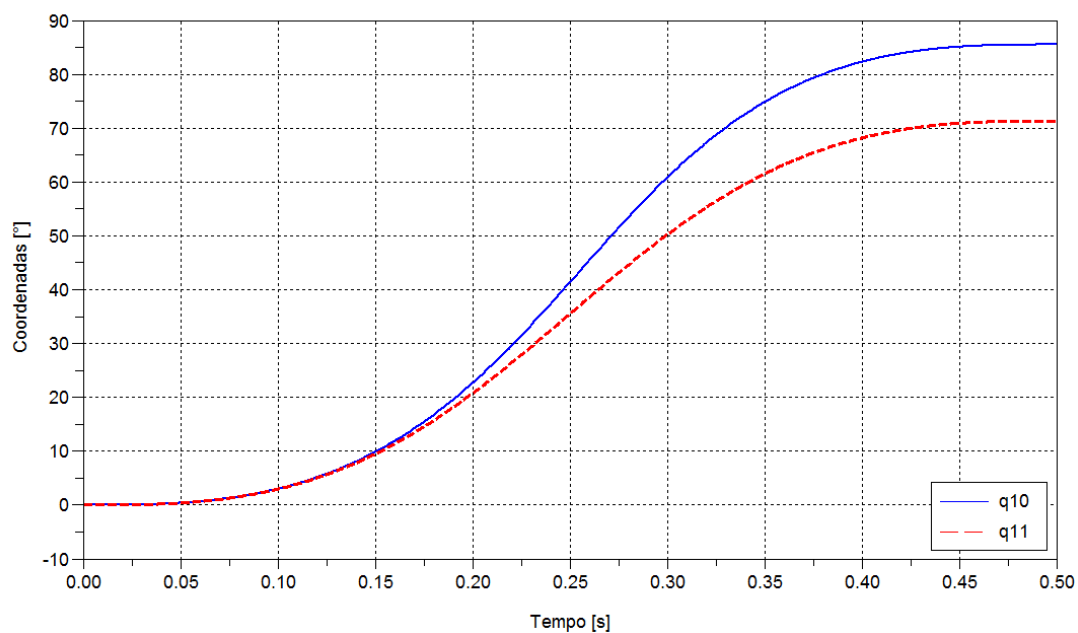


Gráfico 18 – Simulação A0: Coordenadas q_{10} e q_{11}

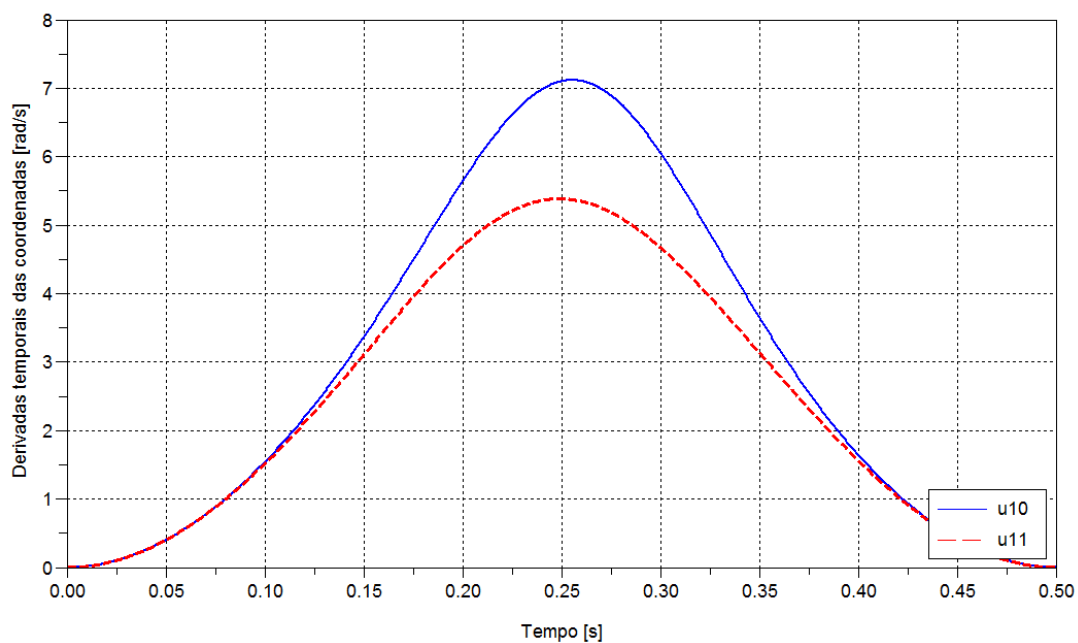


Gráfico 19 – Simulação A0: Coordenadas q_{10} e q_{11} (primeiras derivadas temporais)

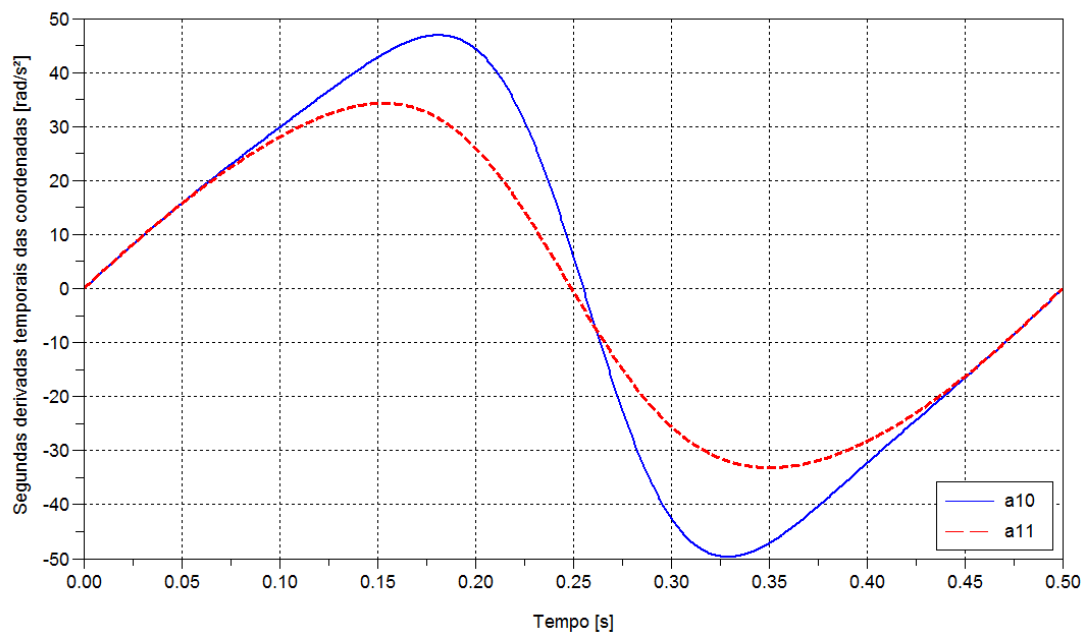


Gráfico 20 – Simulação A0: Coordenadas q_{10} e q_{11} (segundas derivadas temporais)

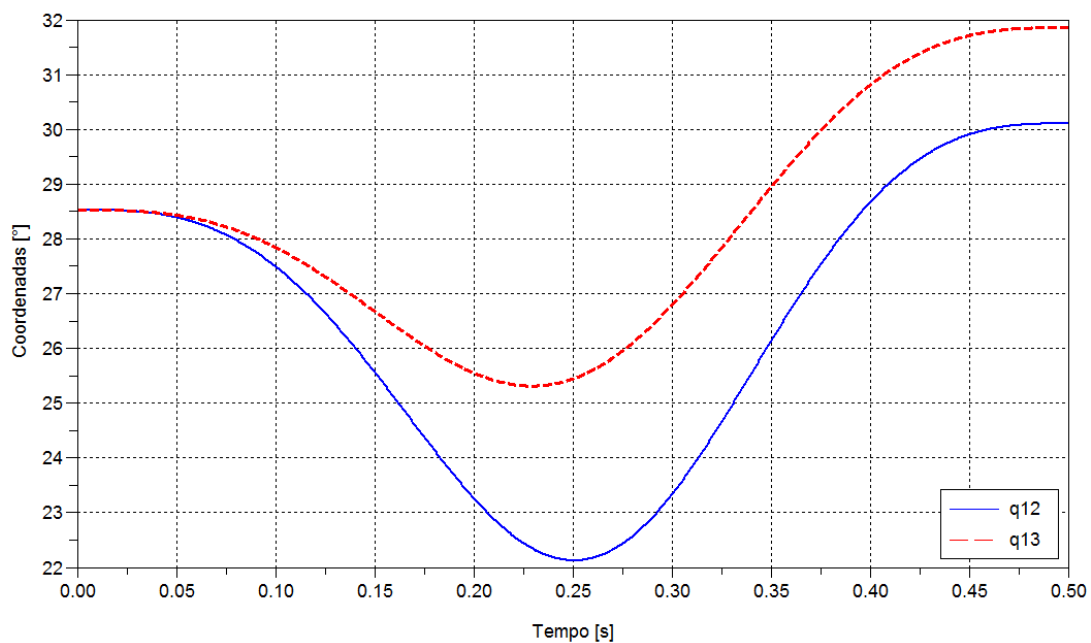


Gráfico 21 – Simulação A0: Coordenadas q_{12} e q_{13}

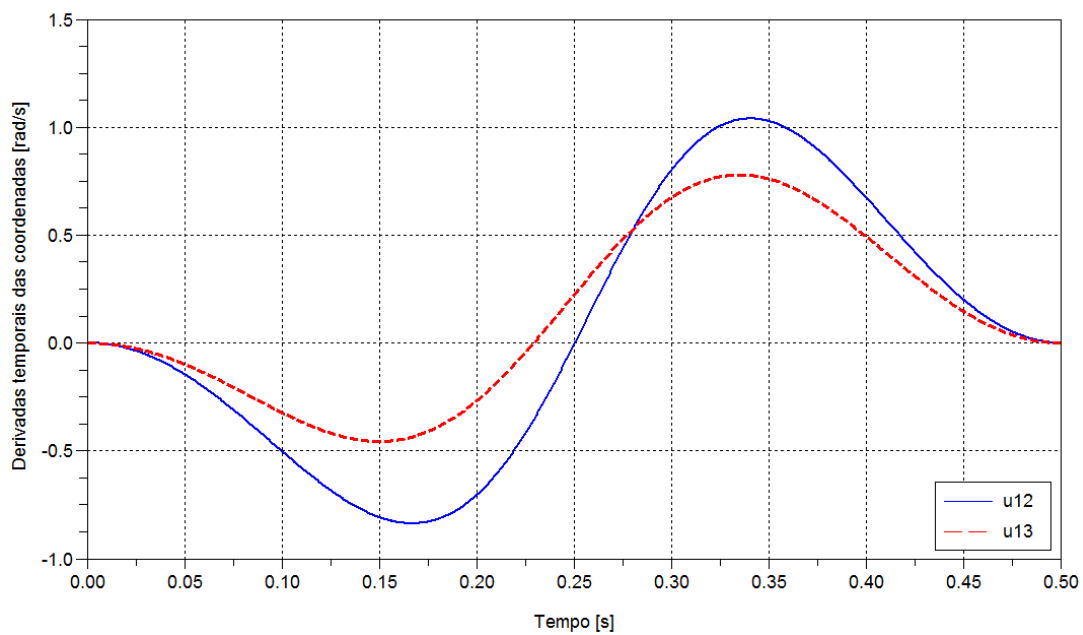


Gráfico 22 – Simulação A0: Coordenadas q_{12} e q_{13} (primeiras derivadas temporais)

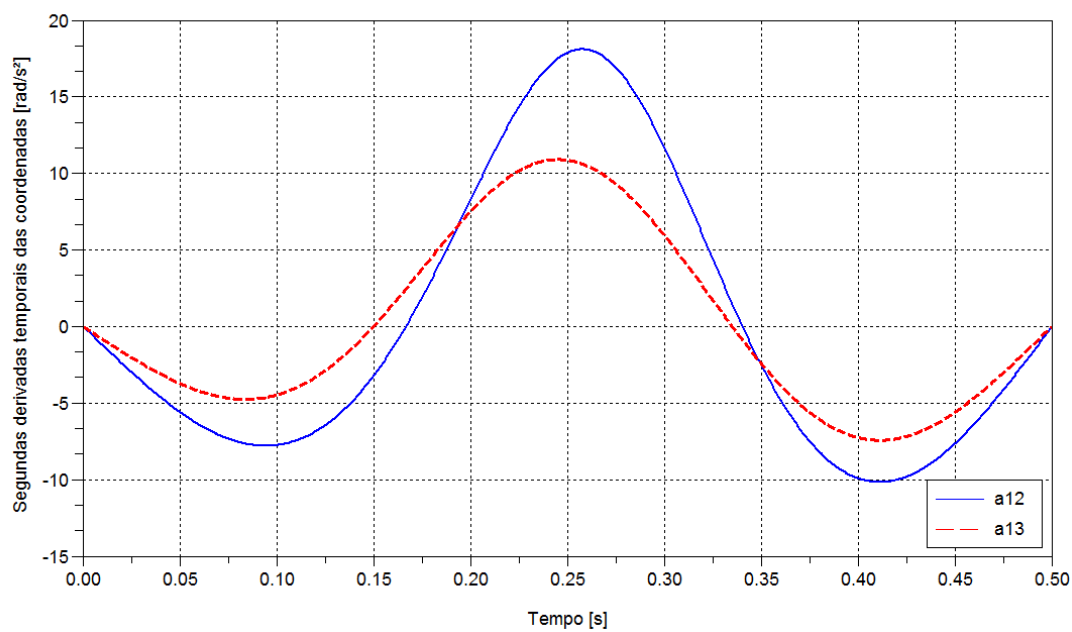
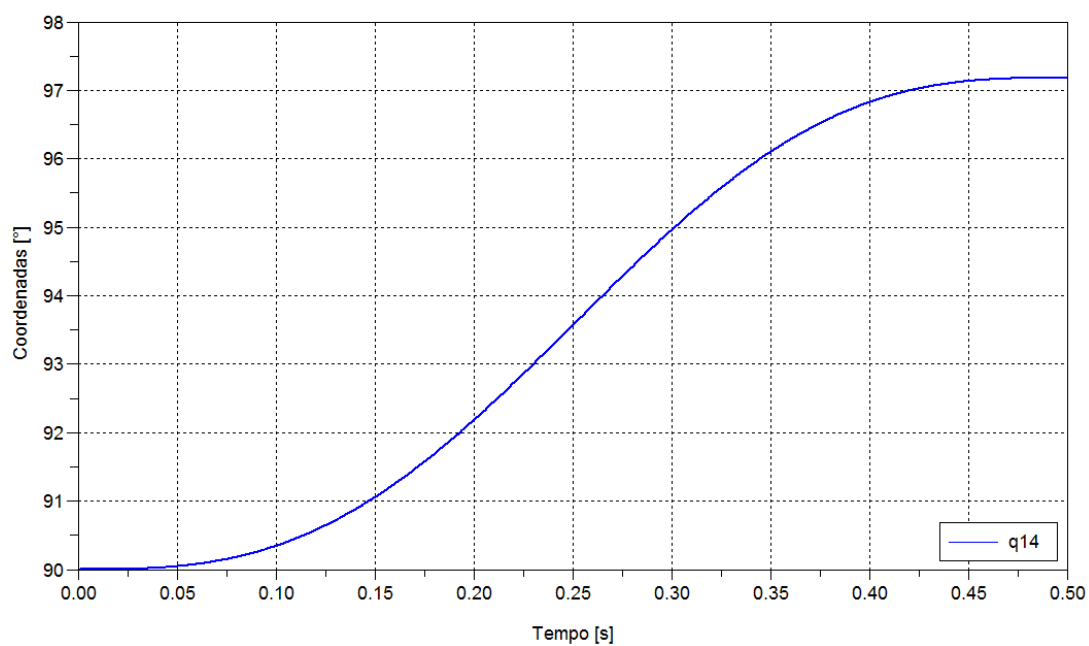
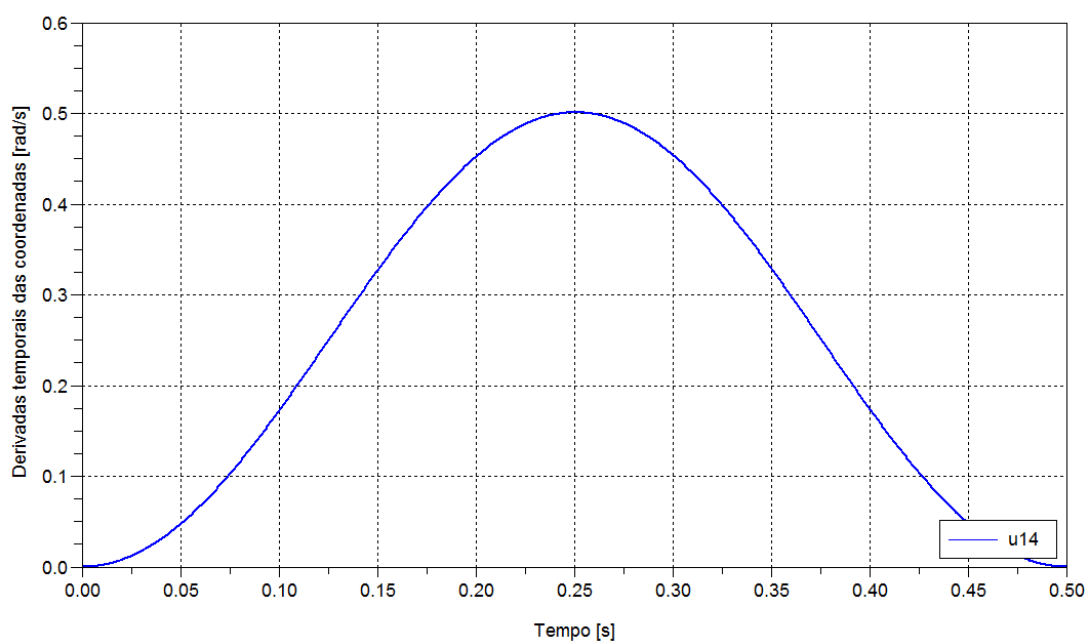


Gráfico 23 – Simulação A0: Coordenadas q_{12} e q_{13} (segundas derivadas temporais)

Gráfico 24 – Simulação A0: Coordenada q_{14} Gráfico 25 – Simulação A0: Coordenada q_{14} (primeira derivada temporal)

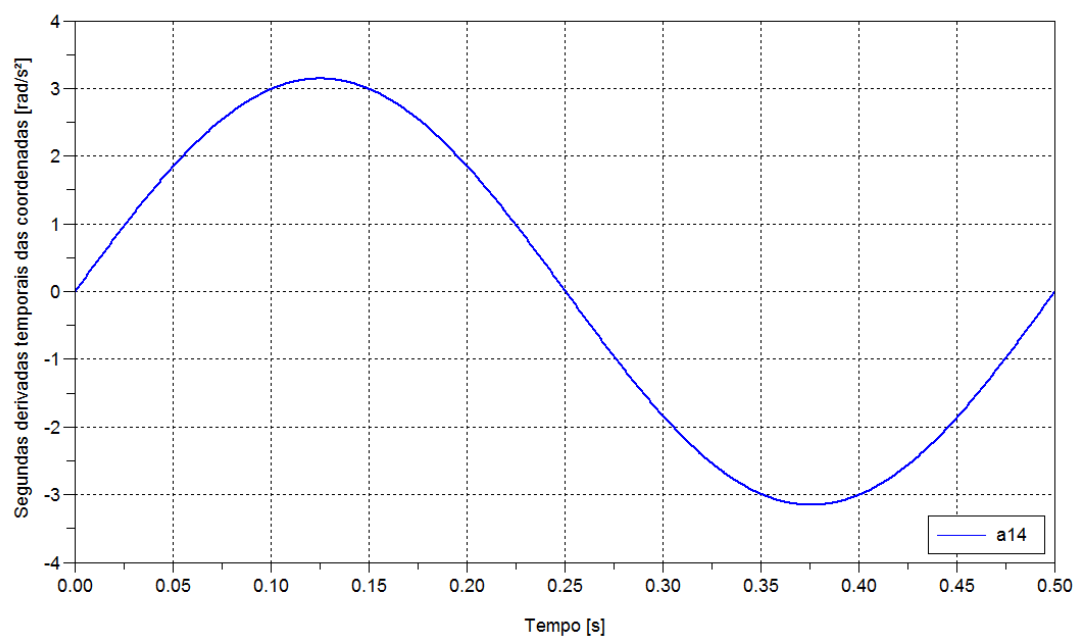


Gráfico 26 – Simulação A0: Coordenada q_{14} (segunda derivada temporal)

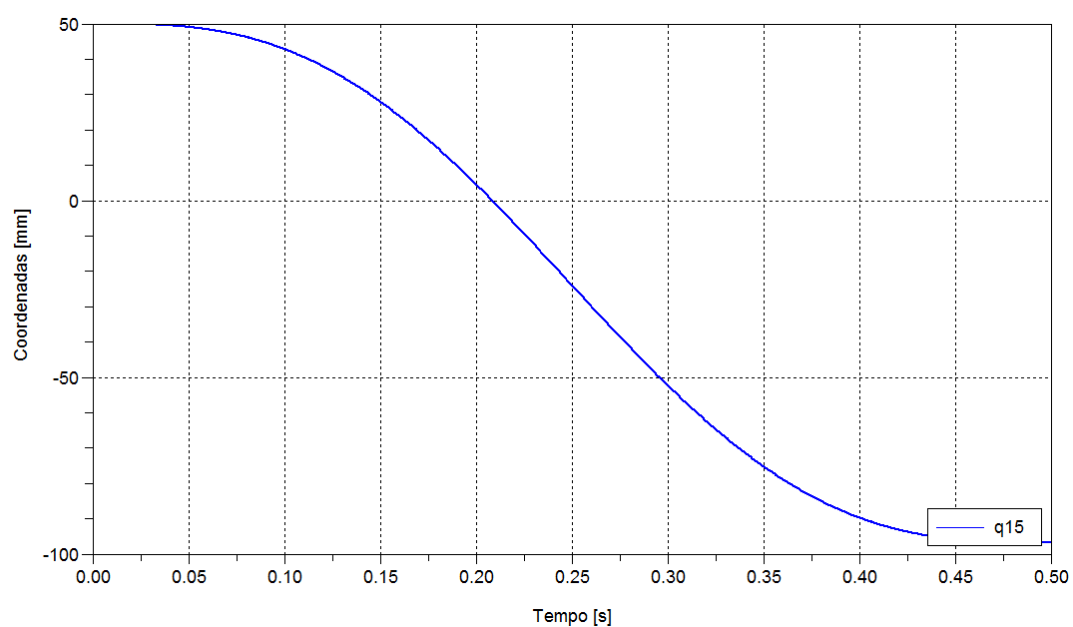


Gráfico 27 – Simulação A0: Coordenada q_{15}

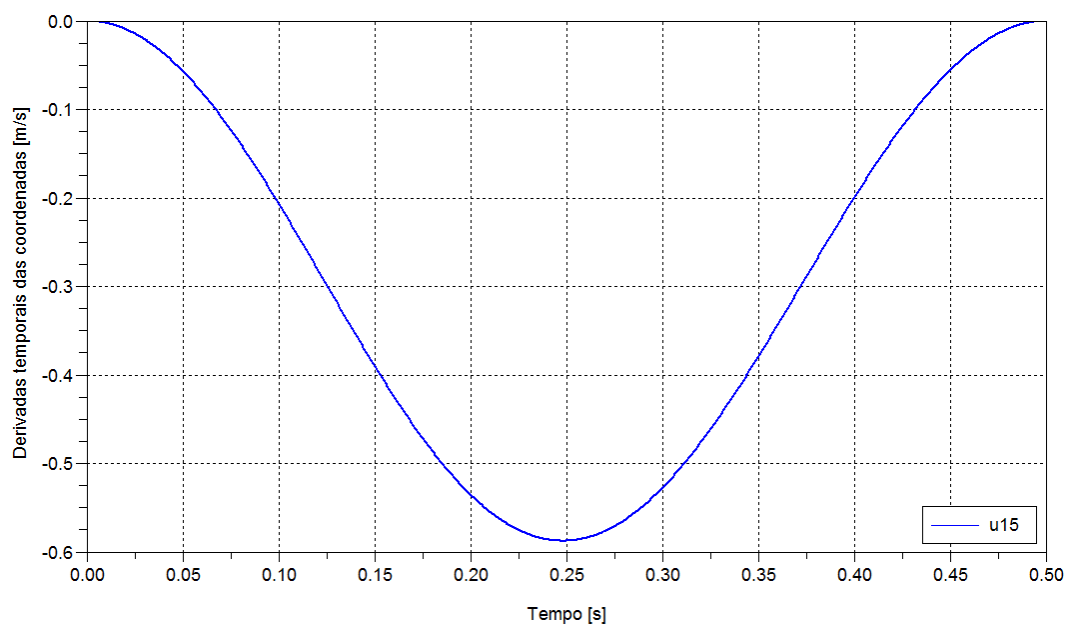


Gráfico 28 – Simulação A0: Coordenada q_{15} (primeira derivada temporal)

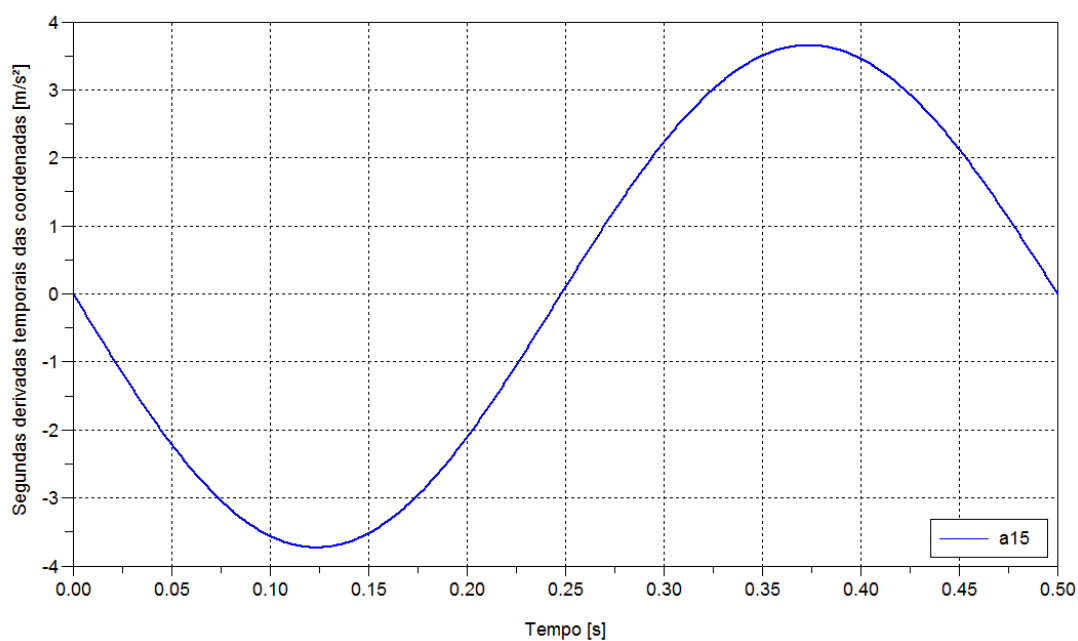


Gráfico 29 – Simulação A0: Coordenada q_{15} (segunda derivada temporal)

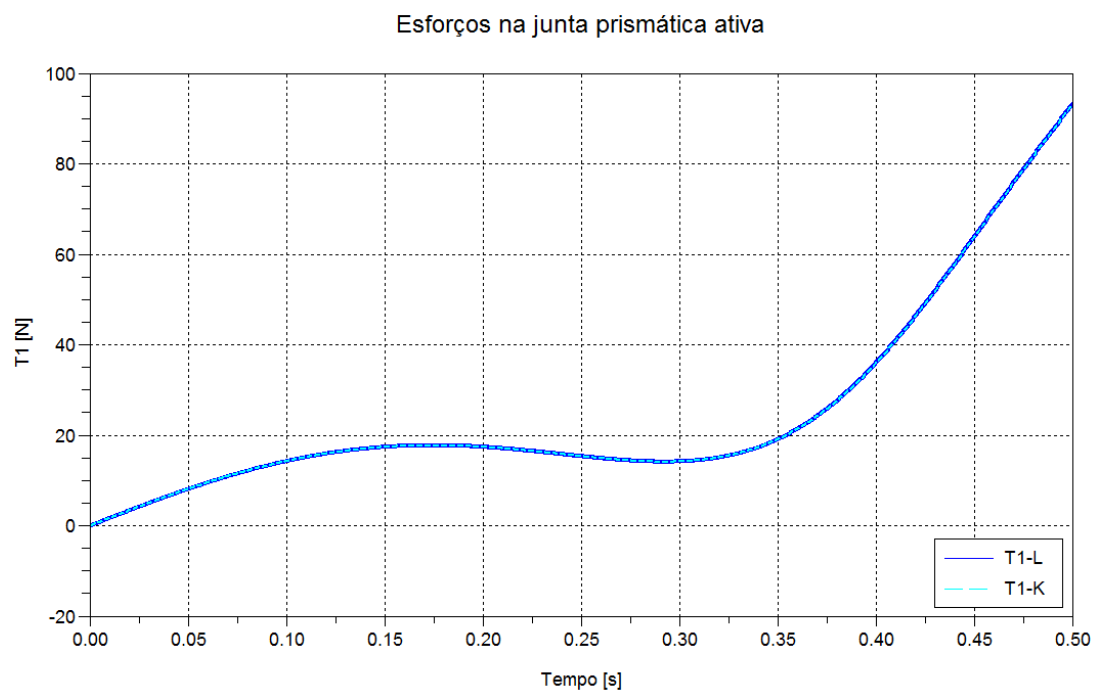


Gráfico 30 – Simulação A0: Forças τ_1 no atuador da junta prismática (Lagrange e Kane)

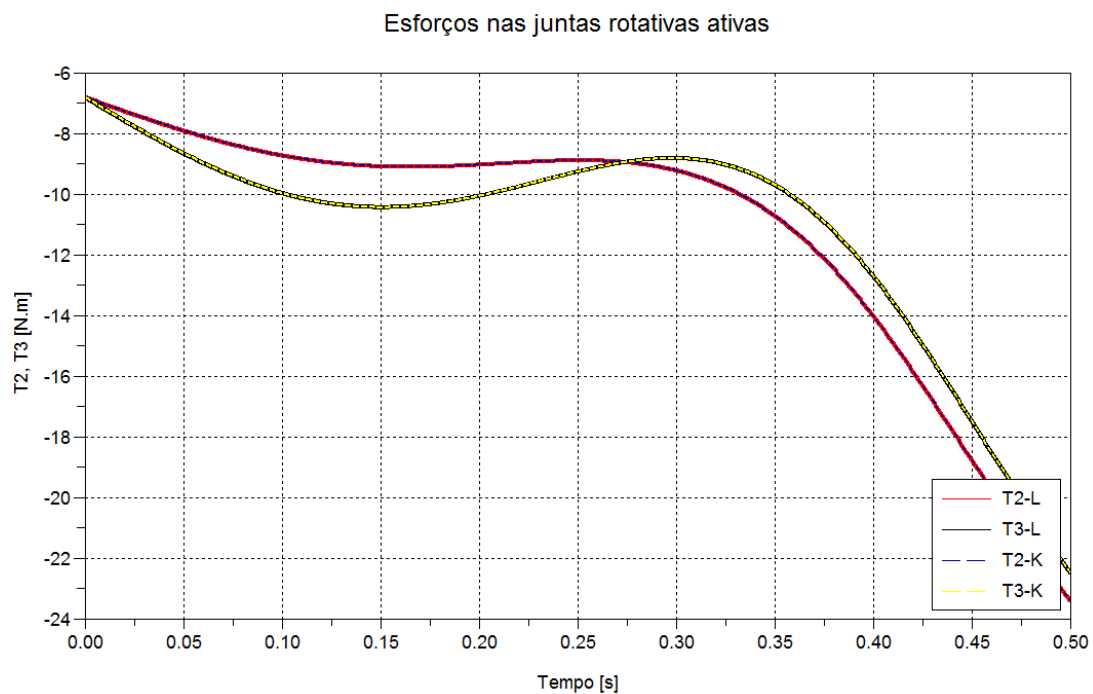


Gráfico 31 – Simulação A0: Torques τ_2 e τ_3 nos atuadores das juntas rotativas (Lagrange e Kane)

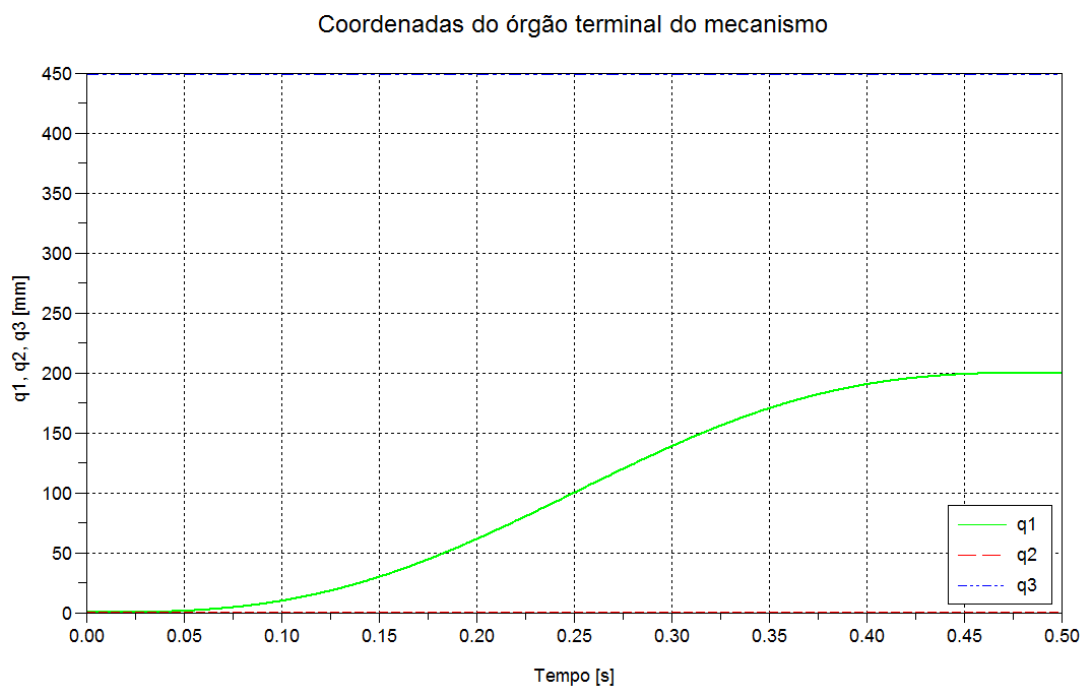
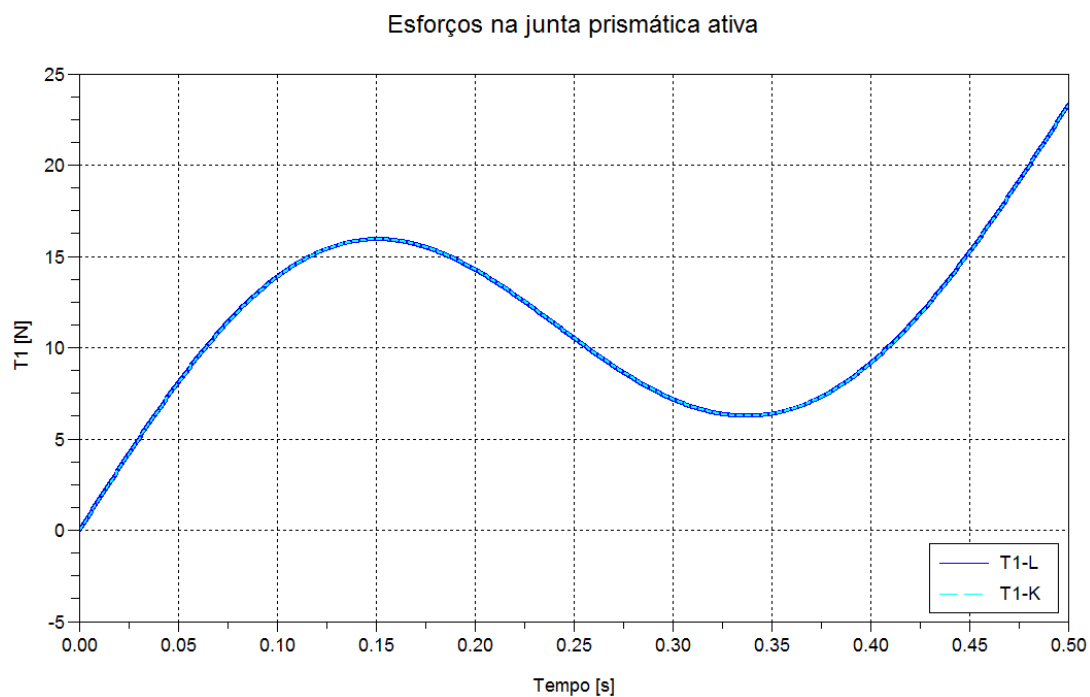


Gráfico 32 – Simulação A1: Coordenadas do órgão terminal do mecanismo

Gráfico 33 – Simulação A1: Forças τ_1 no atuador da junta prismática (Lagrange e Kane)

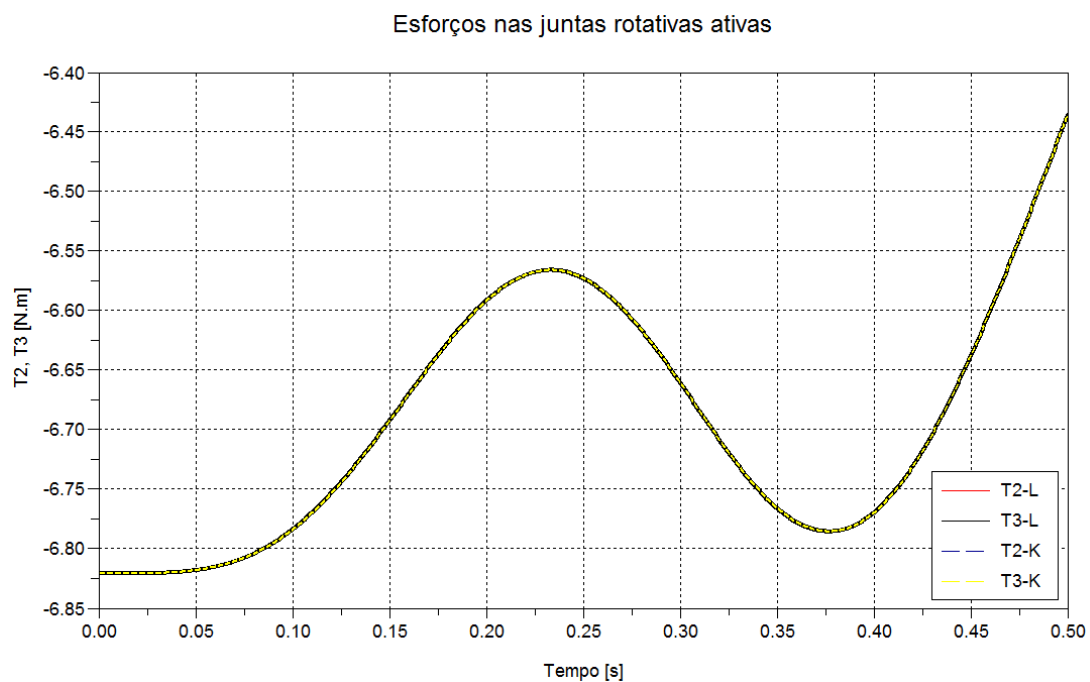


Gráfico 34 – Simulação A1: Torques τ_2 e τ_3 nos atuadores das juntas rotativas (Lagrange e Kane)

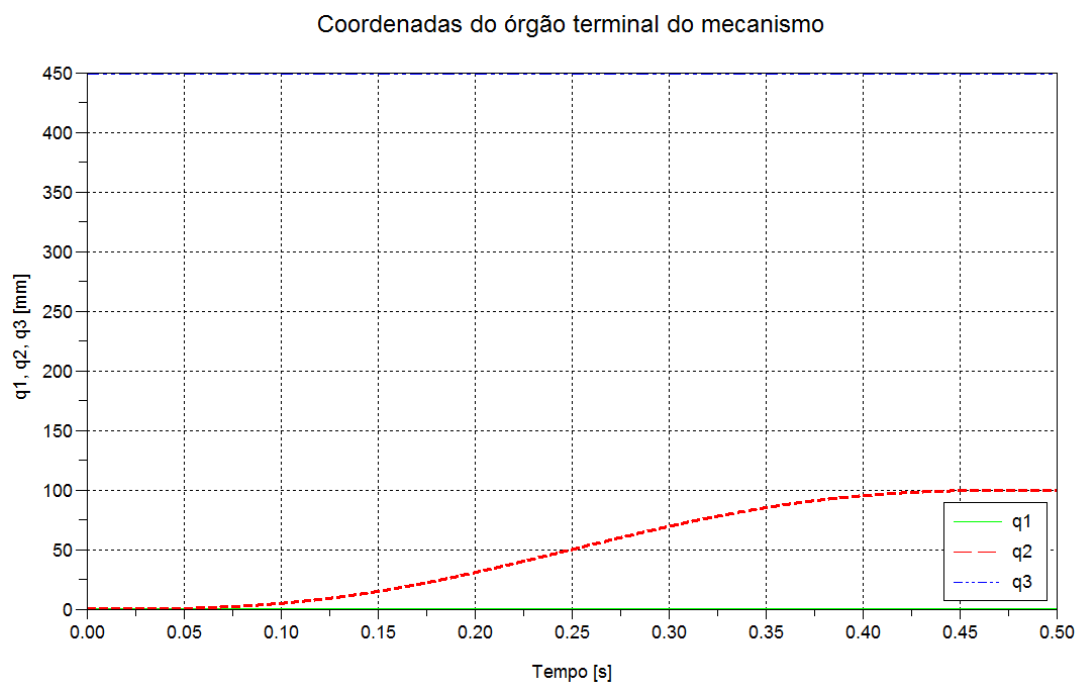


Gráfico 35 – Simulação A2: Coordenadas do órgão terminal do mecanismo

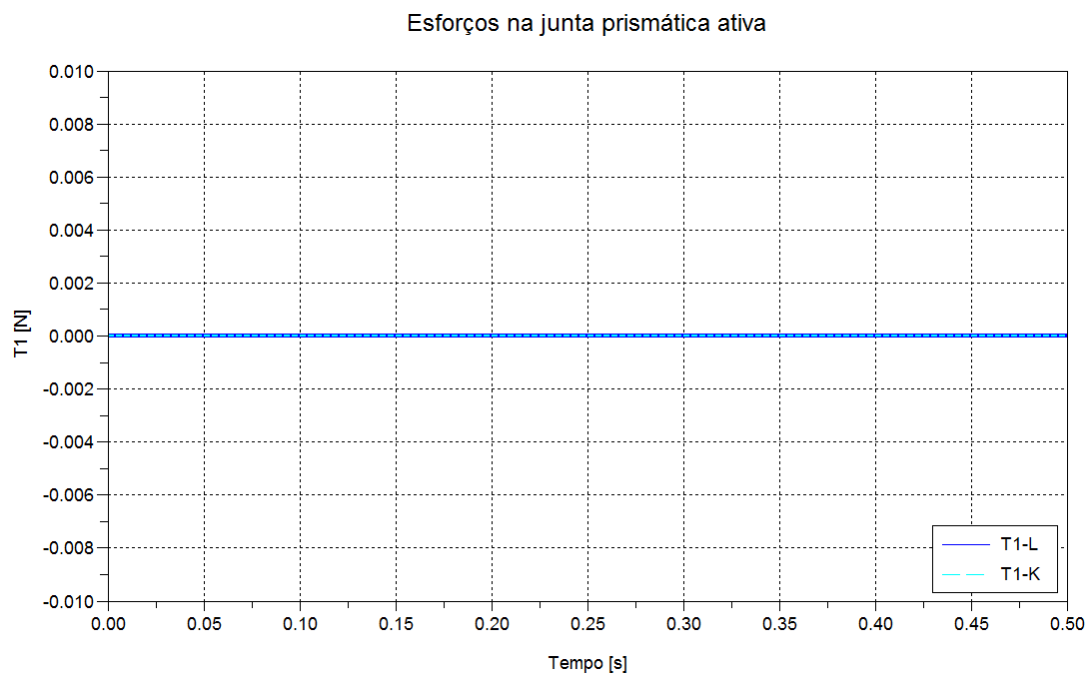


Gráfico 36 – Simulação A2: Forças τ_1 no atuador da junta prismática (Lagrange e Kane)

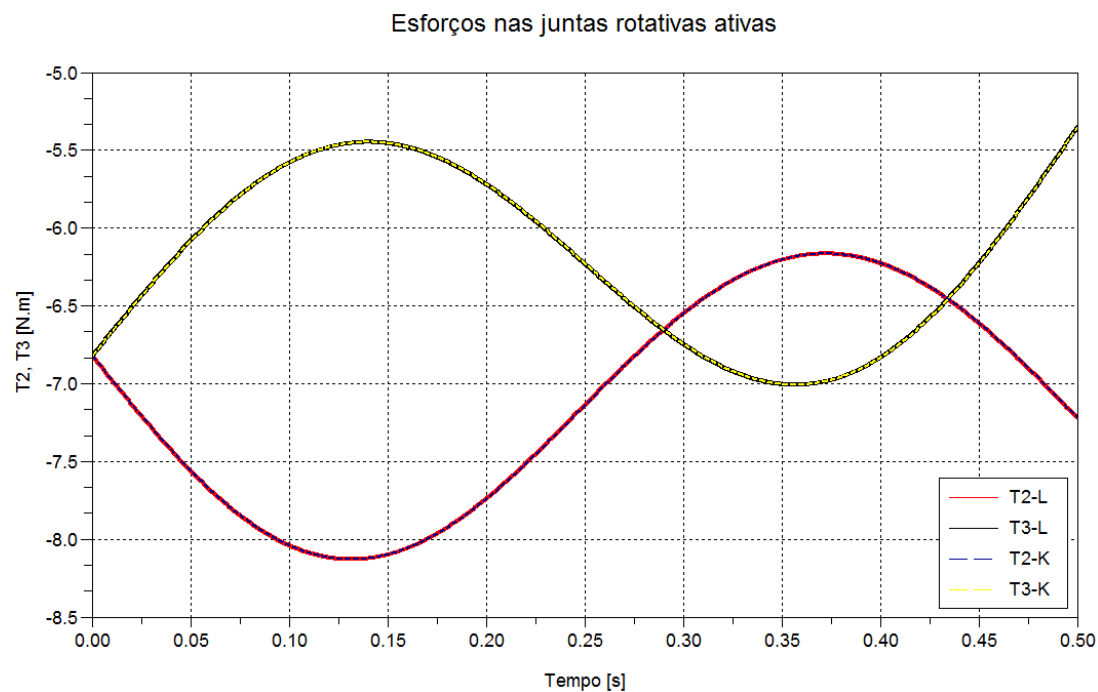


Gráfico 37 – Simulação A2: Torques τ_2 e τ_3 nos atuadores das juntas rotativas (Lagrange e Kane)

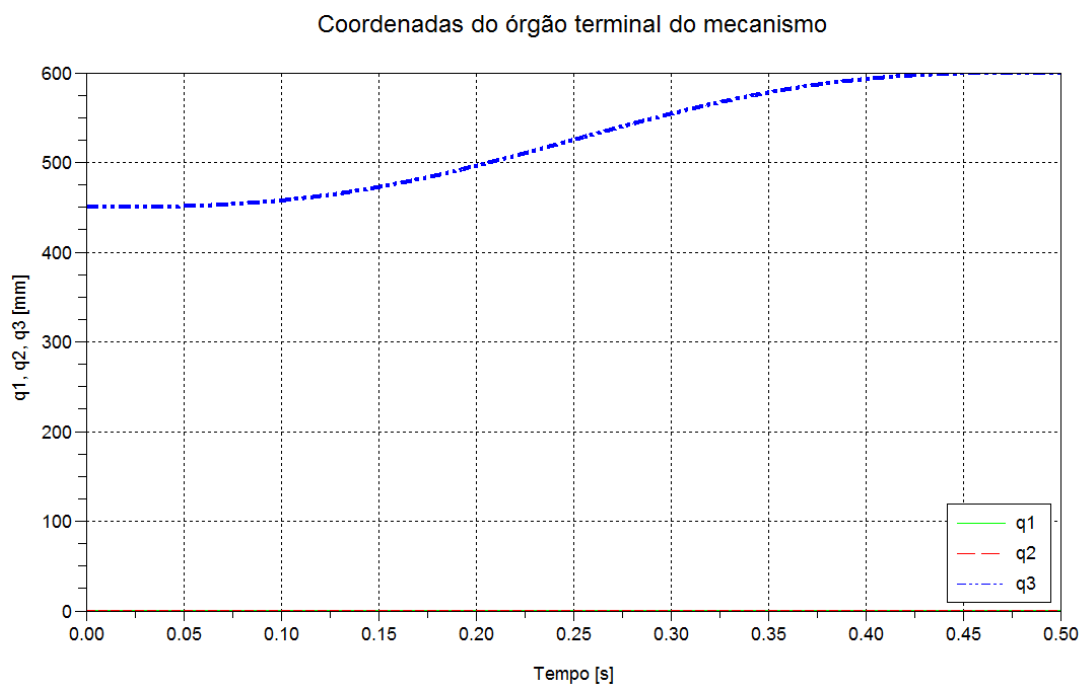


Gráfico 38 – Simulação A3: Coordenadas do órgão terminal do mecanismo

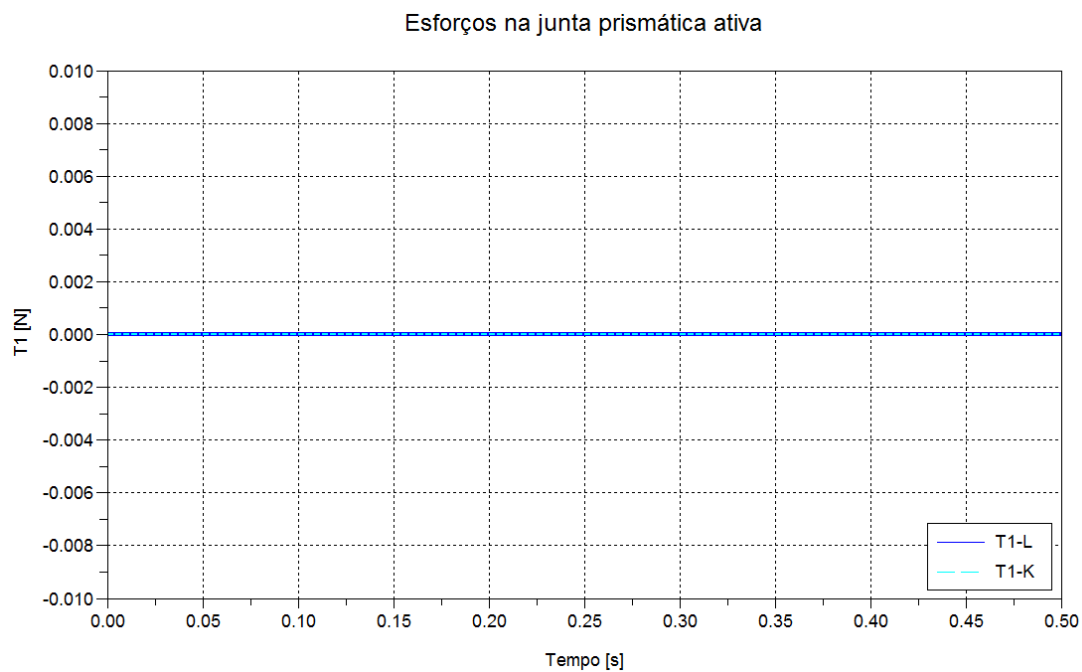


Gráfico 39 – Simulação A3: Forças τ_1 no atuador da junta prismática (Lagrange e Kane)

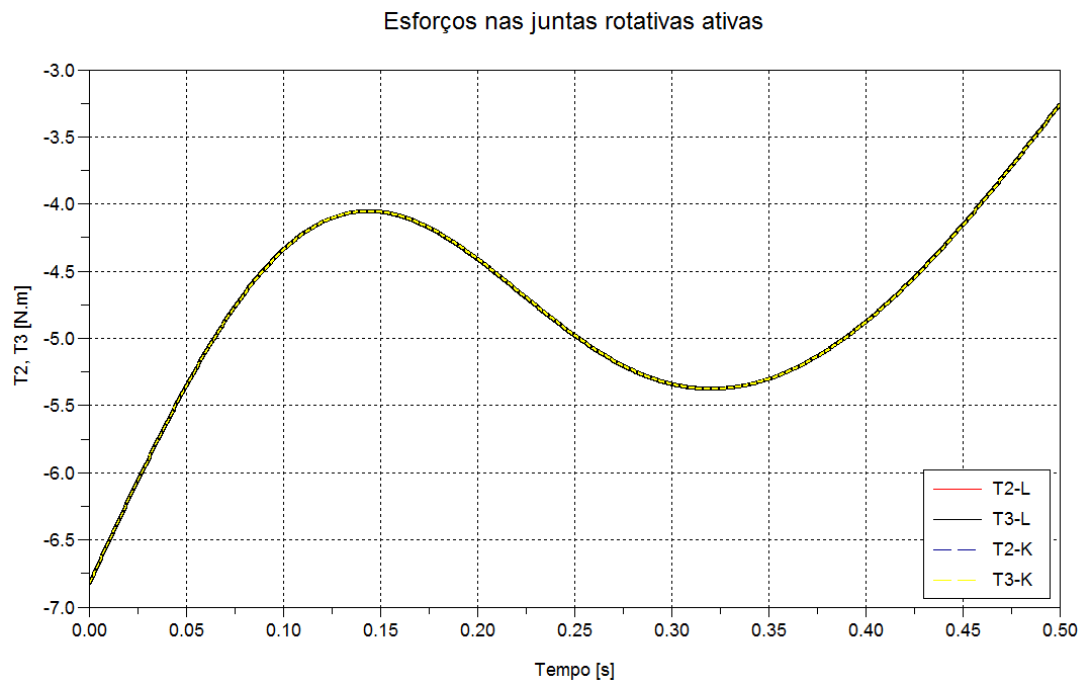


Gráfico 40 – Simulação A3: Torques τ_2 e τ_3 nos atuadores das juntas rotativas (Lagrange e Kane)

3.7 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DE DINÂMICA DIRETA – MODELO #1

Conforme explicado nas seções 2.2 e 2.3, outra possível utilização das equações dinâmicas de um modelo é a realização de simulações dinâmicas diretas, onde para um dado histórico temporal de esforços dos atuadores são obtidos os históricos temporais completos de todas as coordenadas do sistema e de suas derivadas temporais. Este procedimento, contudo, exige integração das equações dinâmicas, havendo em primeiro lugar a necessidade de desenvolver um algoritmo que produza resultados adequados (vide Apêndice B).

Como a seção anterior apresenta resultados de históricos temporais de esforços associados a trajetórias previamente determinadas, uma maneira adequada de testar a viabilidade do integrador numérico de Runge-Kutta de quarta ordem adotado, consiste em adotar para as simulações do tipo A

(modelo #1 com atritos de juntas desprezíveis) como esforços de atuadores, os próprios esforços obtidos para as simulações inversas correspondentes às trajetórias 0, 1, 2 e 3 (vide tabela 18), verificando assim se a rotina adotada é capaz de reproduzir as trajetórias pré-determinadas. Ainda, a fim de verificar a influência do atrito na dinâmica desse mecanismo, existe a possibilidade de se realizar simulações do tipo B (com o modelo #1 e atrito de juntas considerado) com os esforços de entrada sendo considerados iguais aos das simulações inversas A correspondentes, apresentadas na seção anterior. Com isso, verifica-se a partir do desvio observado entre os resultados obtidos e as trajetórias previstas quando se despreza o atrito, verifica-se o quanto o atrito é influente na dinâmica do mecanismo (ou seja, o quão importante é a inclusão do mesmo no modelo). Os resultados são apresentados nos gráficos seguintes, tendo sido obtidos por meio da integração das equações dinâmicas de Kane. Os resultados obtidos pela integração das equações dinâmicas de Lagrange são omitidos pelo fato de serem idênticos aos resultados obtidos pela metodologia de Kane, com diferenças entre os resultados na ordem de grandeza da 10^{-15} mm.

Dos resultados apresentados, cabe comentar acerca de dois fatos relevantes. O primeiro deles reside no fato de que o integrador tem capacidade de produzir resultados excelentes, reproduzindo com precisão as trajetórias pré-estabelecidas quando as simulações inversas foram realizadas para a obtenção dos esforços. Dessa forma a rotina construída fornece resultados dentro do esperado, satisfazendo todas as condições comentadas no Apêndice B. O segundo fato refere-se à grande relevância dos efeitos de atrito na dinâmica do mecanismo, dado que as trajetórias observadas quando se inclui o atrito nas juntas é bastante distinta da trajetória obtida na simulação que não inclui tais efeitos, quando se compara ambas simulações para os mesmos esforços de atuadores aplicados. Dessa maneira, um sistema de controle para esse mecanismo seria melhor projetado se o modelo do mesmo incluísse o atrito nas juntas, pois o mesmo é extremamente relevante na dinâmica desse sistema.

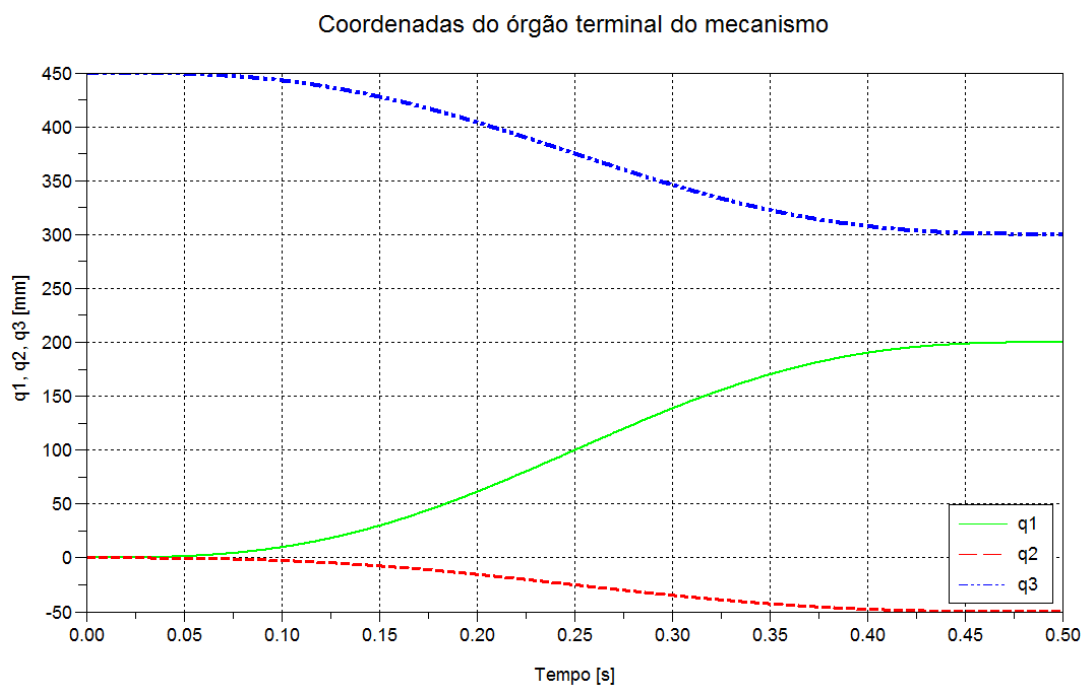


Gráfico 41 – Simulação A0: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

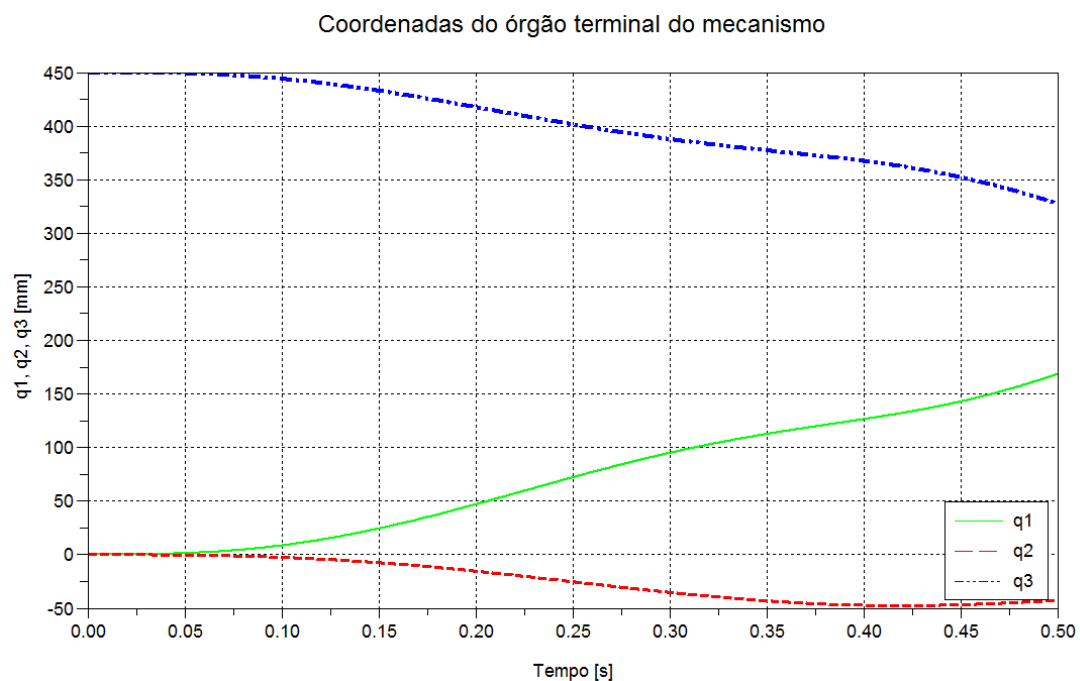


Gráfico 42 – Simulação B0: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

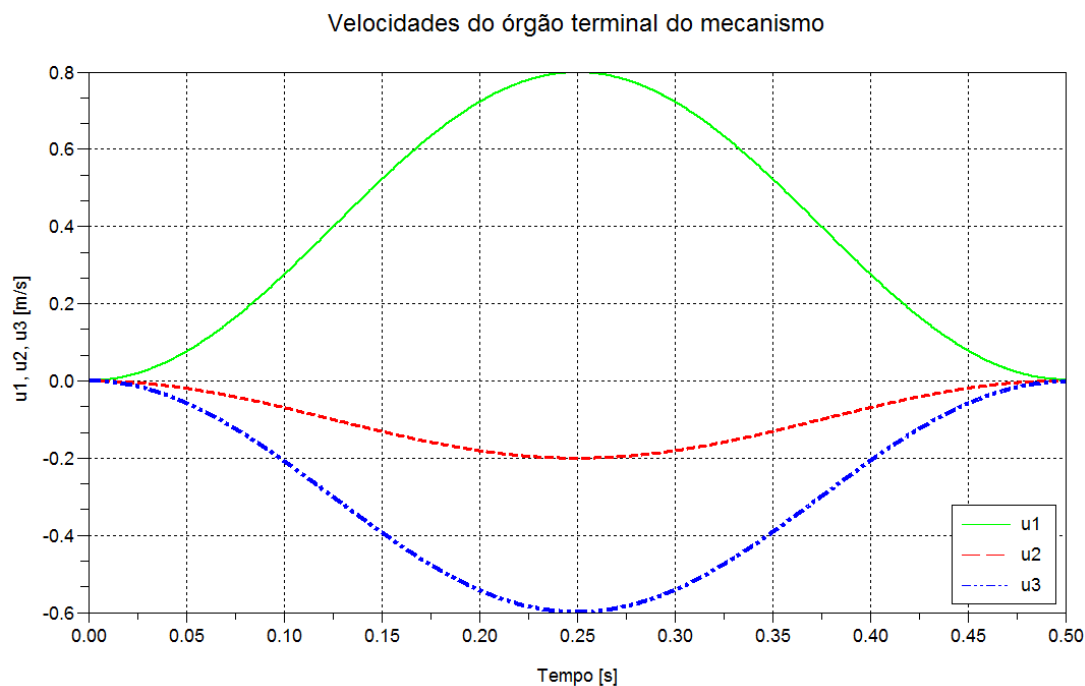


Gráfico 43 – Simulação A0: Velocidades do órgão terminal do mecanismo

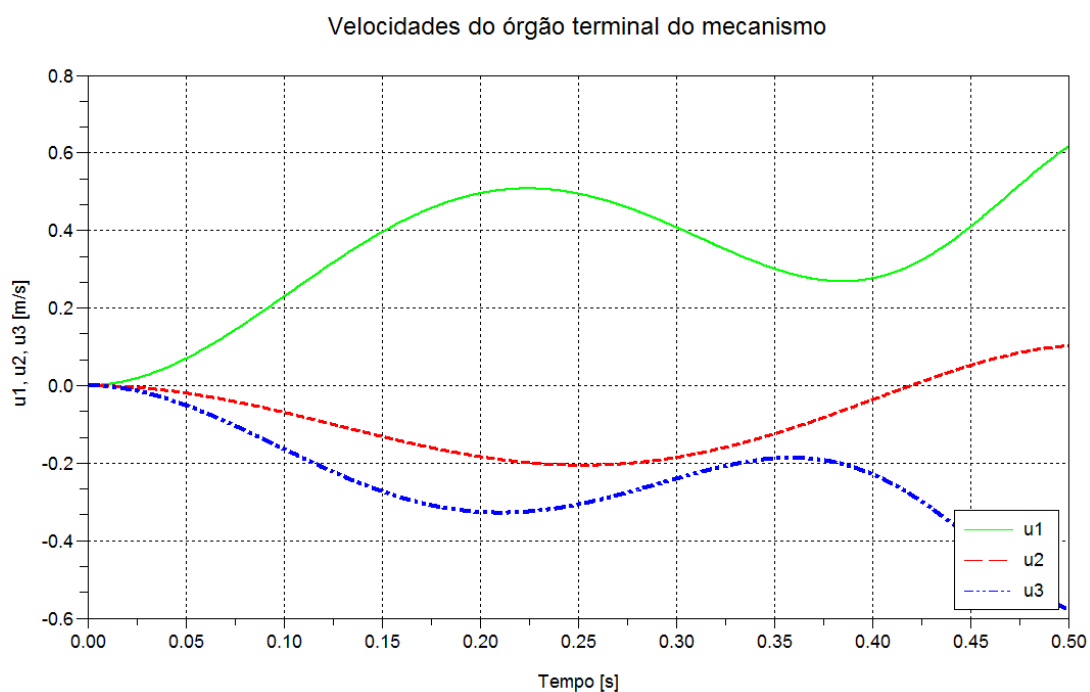


Gráfico 44 – Simulação B0: Velocidades do órgão terminal do mecanismo

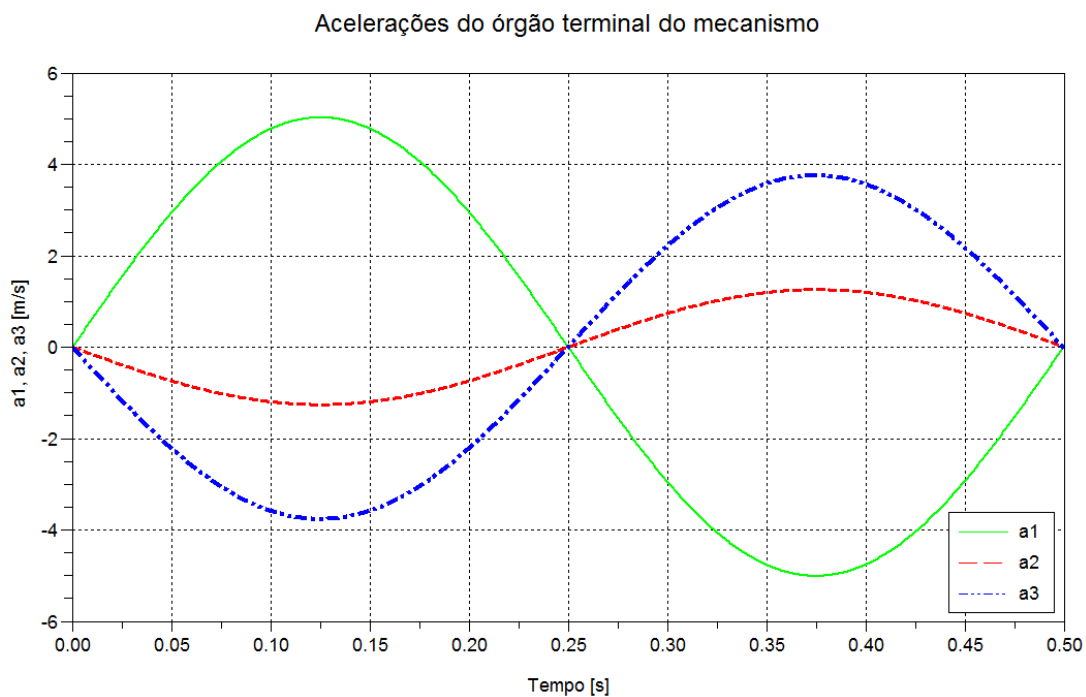


Gráfico 45 – Simulação A0: Acelerações do órgão terminal do mecanismo

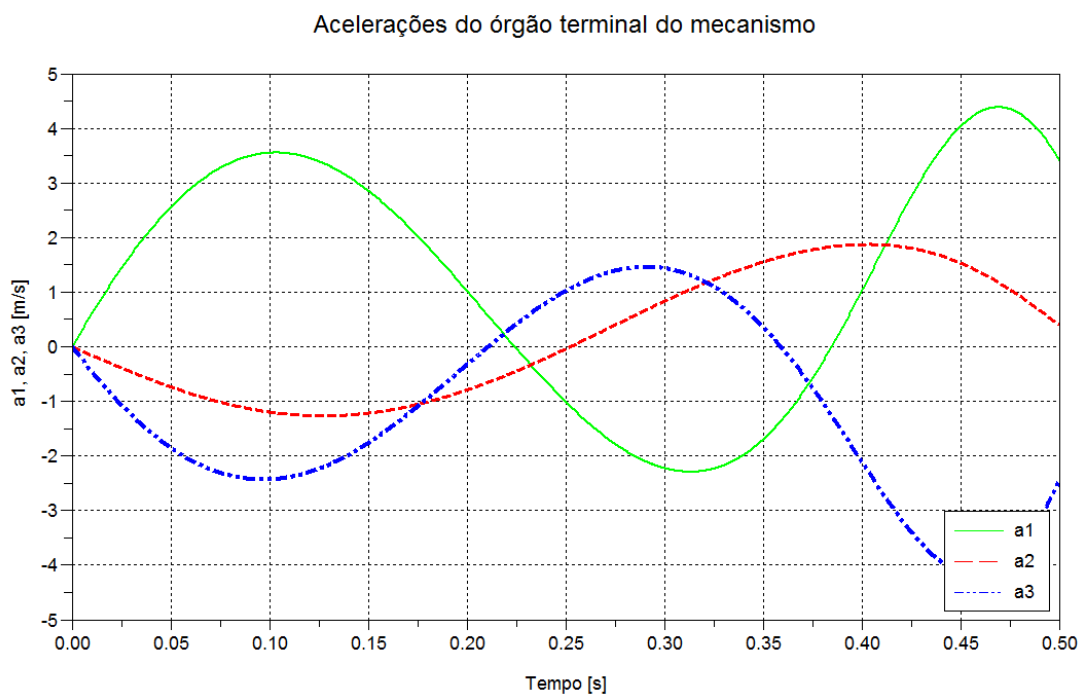


Gráfico 46 – Simulação B0: Acelerações do órgão terminal do mecanismo

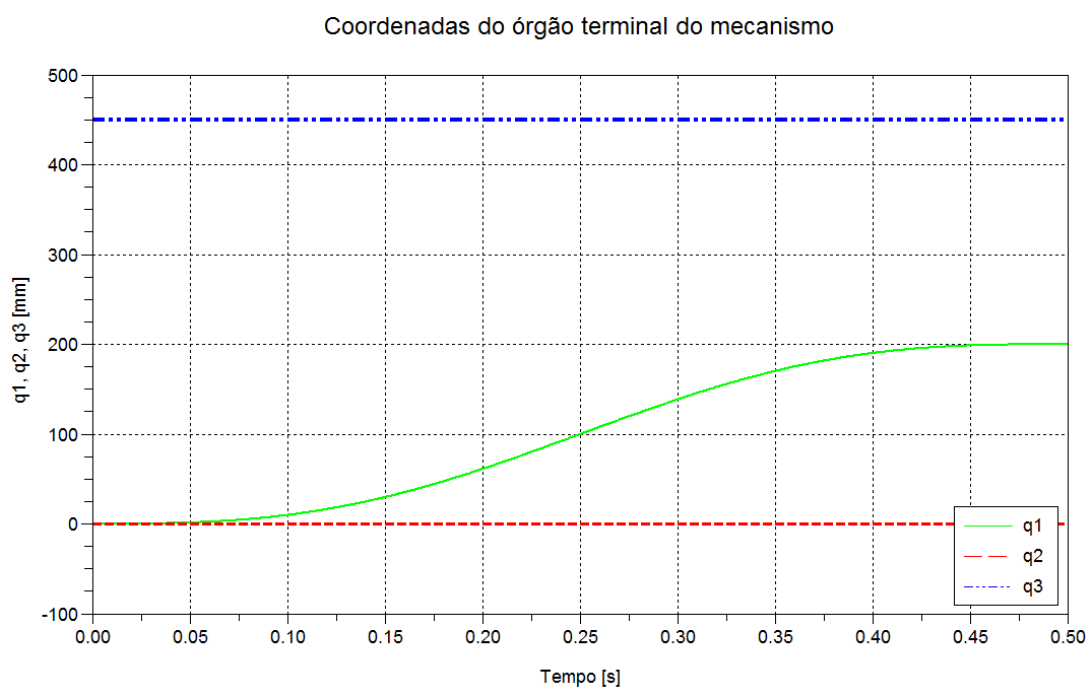


Gráfico 47 – Simulação A1: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

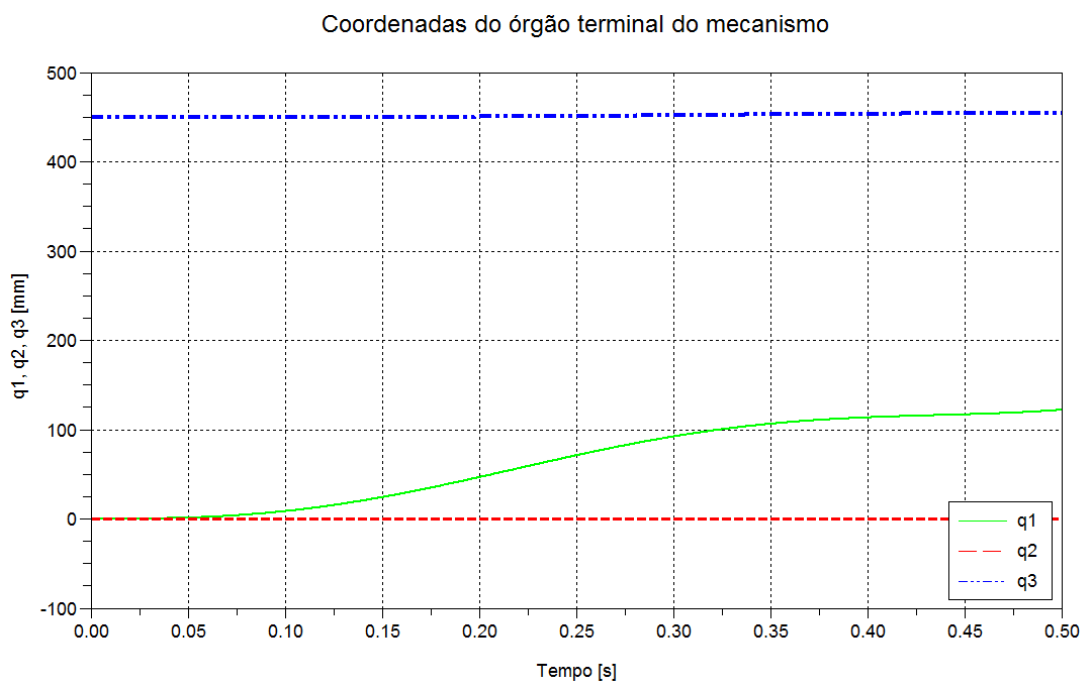


Gráfico 48 – Simulação B1: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

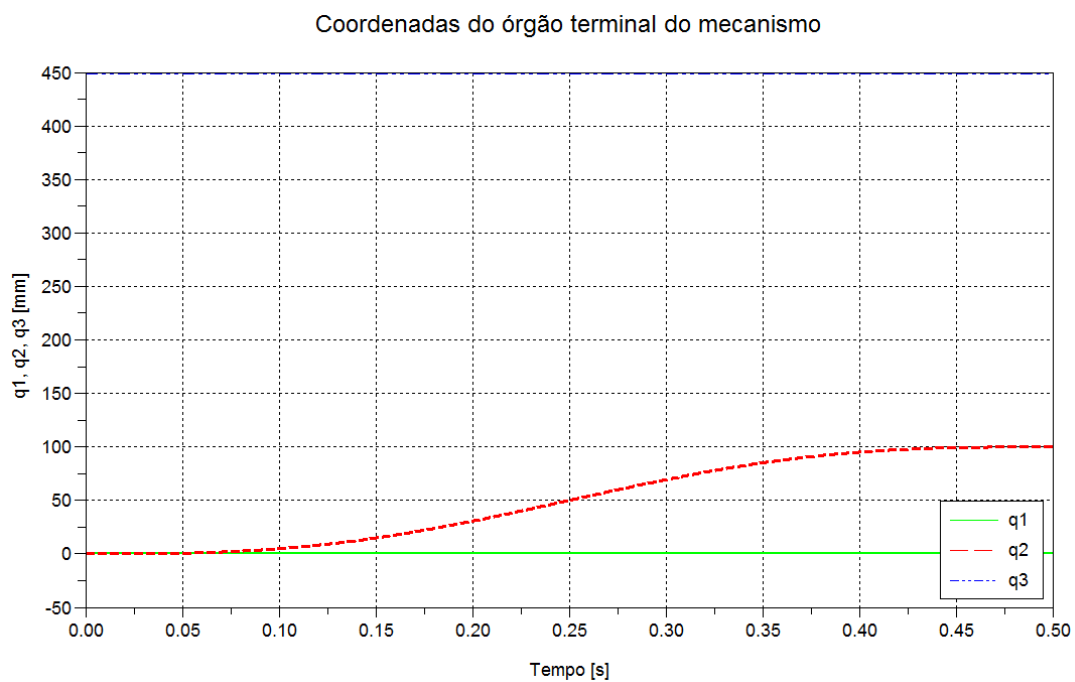


Gráfico 49 – Simulação A2: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

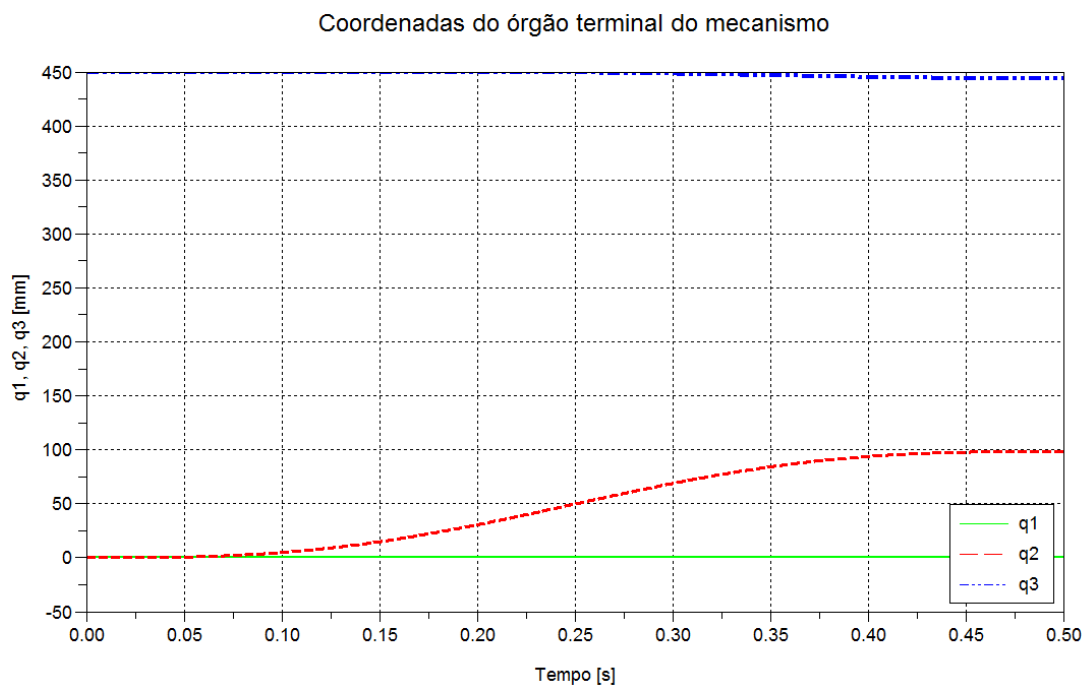


Gráfico 50 – Simulação B2: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

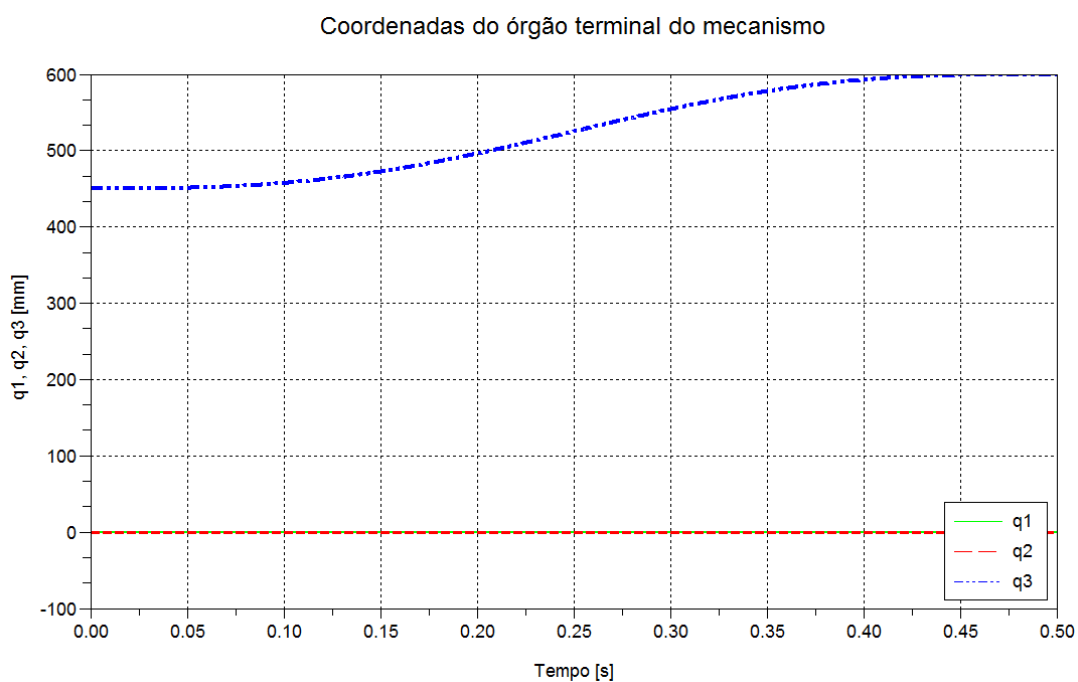


Gráfico 51 – Simulação A3: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

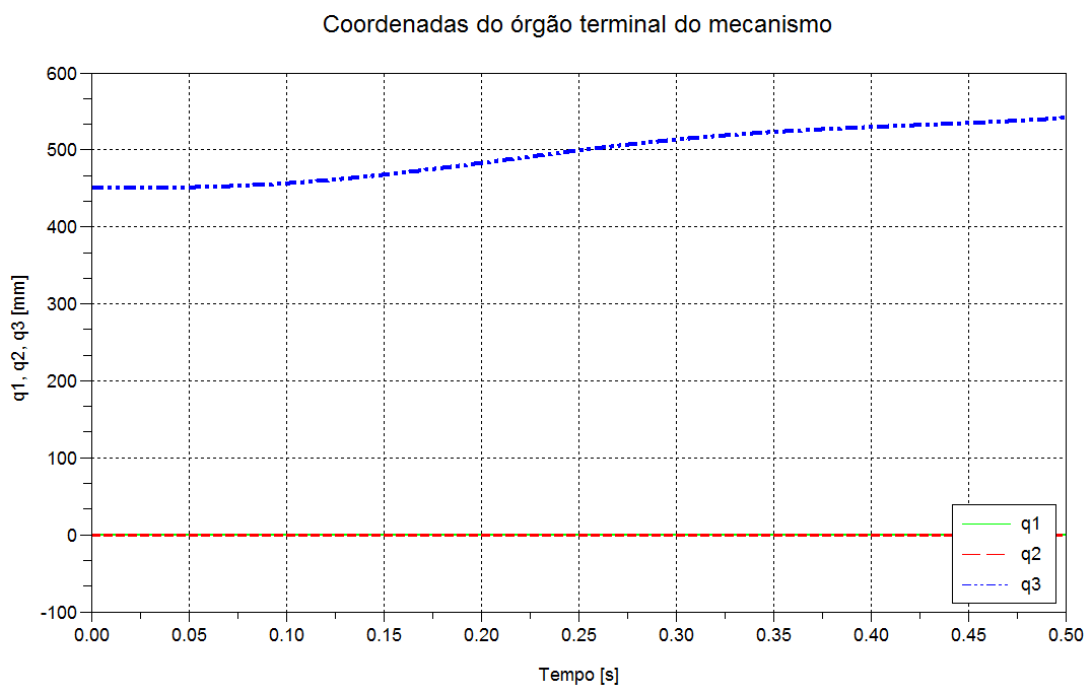


Gráfico 52 – Simulação B3: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

3.8 EQUAÇÕES DINÂMICAS LINEARIZADAS – MODELO #1

Aplicando a metodologia de linearização descrita na seção 2.8 às equações dinâmicas de Lagrange apresentadas na seção 0, obtém-se as seguintes relações (nas quais os $\beta_{i,j}$ são todos calculados para $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$) que fornecem os termos gerais das matrizes $\mathcal{M}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{F}$ e $\mathbf{E}^*$ da forma apresentada na equação (11):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{r,s} = & \mu_1 \beta_{1,r} \beta_{1,s} + \mu_3 (\beta_{2,r} \beta_{2,s} + \beta_{3,r} \beta_{3,s}) + \mu_5 \beta_{14,r} \beta_{14,s} + \beta_{6,r} \beta_{6,s} I_{3,2} \\ & + \beta_{7,r} \beta_{7,s} I_{4,2} + \beta_{12,r} \beta_{12,s} I_{5,1} + \beta_{13,r} \beta_{13,s} I_{6,1} + \beta_{4,r} \beta_{4,s} (\mu_4 \\ & + I_{1,1} + I_{3,1} ((c_6)^*)^2 + I_{3,3} ((s_6)^*)^2) + \beta_{5,r} \beta_{5,s} (\mu_4 + I_{2,1} \\ & + I_{4,1} ((c_7)^*)^2 + I_{4,3} ((s_7)^*)^2) + \beta_{10,r} \beta_{10,s} (I_{7,2} \\ & + I_{5,2} ((c_{12})^*)^2 + I_{5,3} ((s_{12})^*)^2) \\ & + \beta_{11,r} \beta_{11,s} (I_{8,2} + I_{6,2} ((c_{13})^*)^2 + I_{6,3} ((s_{13})^*)^2) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{r,s} = & b_7 \beta_{1,r} \beta_{1,s} + b_1 (\beta_{4,r} \beta_{4,s} + \beta_{5,r} \beta_{5,s}) + b_2 (\beta_{6,r} \beta_{6,s} + \beta_{7,r} \beta_{7,s}) \\ & + b_3 (\beta_{8,r} \beta_{8,s} + \beta_{9,r} \beta_{9,s}) + b_4 (\beta_{10,r} \beta_{10,s} + \beta_{11,r} \beta_{11,s}) \\ & + b_5 (\beta_{12,r} \beta_{12,s} + \beta_{13,r} \beta_{13,s}) + 2b_6 \beta_{14,r} \beta_{14,s} + b_8 \beta_{15,r} \beta_{15,s} \\ & + (\beta_{4,s} \beta_{6,r} - \beta_{4,r} \beta_{6,s}) (I_{3,1} - I_{3,3}) (c_6)^* (s_6)^* (u_4)^* \\ & + (\beta_{5,s} \beta_{7,r} - \beta_{5,r} \beta_{7,s}) (I_{4,1} - I_{4,3}) (c_7)^* (s_7)^* (u_5)^* \\ & + (\beta_{10,s} \beta_{12,r} - \beta_{10,r} \beta_{12,s}) (I_{5,2} - I_{5,3}) (c_{12})^* (s_{12})^* (u_{10})^* \\ & + (\beta_{11,s} \beta_{13,r} - \beta_{11,r} \beta_{13,s}) (I_{6,2} - I_{6,3}) (c_{13})^* (s_{13})^* (u_{11})^* \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{r,s} = & -\beta_{6,r} \beta_{6,s} (I_{3,3} ((c_6)^*)^2 + I_{3,1} ((s_6)^*)^2) ((u_4)^*)^2 \\ & - \beta_{7,r} \beta_{7,s} (I_{4,3} ((c_7)^*)^2 + I_{4,1} ((s_7)^*)^2) ((u_5)^*)^2 \\ & - \beta_{12,r} \beta_{12,s} (I_{5,3} ((c_{12})^*)^2 + I_{5,2} ((s_{12})^*)^2) ((u_{10})^*)^2 \\ & - \beta_{13,r} \beta_{13,s} (I_{6,3} ((c_{13})^*)^2 + I_{6,2} ((s_{13})^*)^2) ((u_{11})^*)^2 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_r = \frac{1}{2} & (2gm_2\beta_{3,r} + 2gm_4\beta_{3,r} + 4gm_6\beta_{3,r} + ga_3m_3\beta_{14,r}(c_{14})^* \\
& - 2b_7\beta_{1,r}(u_1)^* - 2b_1\beta_{4,r}(u_4)^* - 2\mu_2\beta_{4,r}(s_4)^*(u_3)^*(u_4)^* \\
& + 2\beta_{6,r}(-I_{3,1} + I_{3,3})(c_6)^*(s_6)^*((u_4)^*)^2 \\
& + \beta_{4,r}(c_4)^*(ga_1(m_1 + m_2 + 2m_5) - 2\mu_2(u_2)^*(u_4)^*) \\
& - 2b_1\beta_{5,r}(u_5)^* - 2\mu_2\beta_{5,r}(s_5)^*(u_3)^*(u_5)^* \\
& + 2\beta_{7,r}(-I_{4,1} + I_{4,3})(c_7)^*(s_7)^*((u_5)^*)^2 \\
& + \beta_{5,r}(c_5)^*(ga_1(m_1 + m_2 + 2m_5) + 2\mu_2(u_2)^*(u_5)^*) \\
& - 2b_2(\beta_{6,r}(u_6)^* + \beta_{7,r}(u_7)^*) - 2b_3(\beta_{8,r}(u_8)^* + \beta_{9,r}(u_9)^*) \\
& + 2\beta_{12,r}(-I_{5,2} + I_{5,3})(c_{12})^*(s_{12})^*((u_{10})^*)^2 \\
& + 2\beta_{13,r}(-I_{6,2} + I_{6,3})(c_{13})^*(s_{13})^*((u_{11})^*)^2 \\
& - 2b_4(\beta_{10,r}(u_{10})^* + \beta_{11,r}(u_{11})^*) \\
& - 2b_5(\beta_{12,r}(u_{12})^* + \beta_{13,r}(u_{13})^*) - 4b_6\beta_{14,r}(u_{14})^* \\
& - 2b_8\beta_{15,r}(u_{15})^*)
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\mathbf{E}_r^* = [\beta_{1,r} \quad \beta_{4,r} \quad \beta_{5,r}] \tag{29}$$

Aplicando o procedimento da seção 2.8 às equações dinâmicas de Kane apresentadas na seção 3.4, obtêm-se as seguintes expressões para os termos gerais das matrizes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{r,s} = \mu_2 & \left((c_4)^* \left(-(\beta_{4,r}\beta_{3,s} + \beta_{3,r}\beta_{4,s}) \right) - (c_5)^* (\beta_{5,r}\beta_{3,s} + \beta_{3,r}\beta_{5,s}) \right. \\
& + (s_4)^* (\beta_{4,r}\beta_{2,s} + \beta_{2,r}\beta_{4,s}) - (s_5)^* (\beta_{5,r}\beta_{2,s} + \beta_{2,r}\beta_{5,s}) \\
& - \beta_{4,r}\beta_{4,s} (((s_6)^*)^2 (I_{3,3} - I_{3,1}) + I_{1,1} + I_{3,1} + \mu_4) \\
& - \beta_{5,r}\beta_{5,s} (((s_7)^*)^2 (I_{4,3} - I_{4,1}) + I_{2,1} + I_{4,1} + \mu_4) \\
& - \beta_{10,r} (((s_{12})^*)^2 I_{5,3} - (((s_{12})^*)^2 - 1) I_{5,2} + I_{7,2}) \beta_{10,s} \\
& - \beta_{11,r} (((s_{13})^*)^2 I_{6,3} - (((s_{13})^*)^2 - 1) I_{6,2} + I_{8,2}) \beta_{11,s} \\
& - I_{3,2} \beta_{6,r} \beta_{6,s} - I_{4,2} \beta_{7,r} \beta_{7,s} - I_{5,1} \beta_{12,r} \beta_{12,s} - I_{6,1} \beta_{13,r} \beta_{13,s} \\
& \left. - \mu_1 \beta_{1,r} \beta_{1,s} - \mu_3 (\beta_{2,r} \beta_{2,s} + \beta_{3,r} \beta_{3,s}) - \mu_5 \beta_{14,r} \beta_{14,s} \right)
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{r,s} = & \frac{1}{4} \left(-4b_5(\beta_{11,r}((c_{13})^*\beta_{10,s} + 2\beta_{11,s}) + \beta_{12,r}\beta_{12,s} + \beta_{13,r}\beta_{13,s}) \right. \\
& - 4b_7\beta_{1,r}\beta_{1,s} - 4b_1(\beta_{4,r}\beta_{4,s} + \beta_{5,r}\beta_{5,s}) \\
& - 4b_2(\beta_{5,r}(\beta_{4,s} + \beta_{5,s}) + \beta_{6,r}\beta_{6,s} + \beta_{7,r}\beta_{7,s}) \\
& - 4b_3(\beta_{8,r}\beta_{8,s} + \beta_{9,r}\beta_{9,s}) - 4b_4(\beta_{10,r}\beta_{10,s} + \beta_{11,r}\beta_{11,s}) \\
& - 8b_6\beta_{14,r}\beta_{14,s} - 4b_8\beta_{15,r}\beta_{15,s} \\
& + 8(c_6)^*(s_6)^*(I_{3,1} - I_{3,3})((u_4)^*(\beta_{4,r}\beta_{6,s} - \beta_{6,r}\beta_{4,s}) \\
& + (u_6)^*\beta_{4,r}\beta_{4,s}) \\
& + 8(c_7)^*(s_7)^*(I_{4,1} - I_{4,3})((u_5)^*(\beta_{5,r}\beta_{7,s} - \beta_{7,r}\beta_{5,s}) \\
& + (u_7)^*\beta_{5,r}\beta_{5,s}) \\
& + 4(c_{12})^*(s_{12})^*(I_{5,2} - I_{5,3})(2(u_{10})^*(\beta_{10,r}\beta_{12,s} - \beta_{12,r}\beta_{10,s}) \\
& + 2(u_{12})^*\beta_{10,r}\beta_{10,s}) \\
& + 4(c_{13})^*(s_{13})^*(I_{6,2} - I_{6,3})(2(u_{11})^*(\beta_{11,r}\beta_{13,s} - \beta_{13,r}\beta_{11,s}) \\
& + 2(u_{13})^*\beta_{11,r}\beta_{11,s}) \\
& + 8\mu_2 \left((u_4)^*\beta_{4,s}((c_4)^*\beta_{2,r} + (s_4)^*\beta_{3,r}) \right. \\
& \left. + (u_5)^*\beta_{5,s}((s_5)^*\beta_{3,r} - (c_5)^*\beta_{2,r})) \right) \Big) \tag{31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{r,s} = & \frac{1}{2} \left(a_1(-g)(m_1 + 2m_5)((s_4)^*\beta_{4,r}\beta_{4,s} + (s_5)^*\beta_{5,r}\beta_{5,s}) \right. \\
& + a_3g(s_{14})^*(\mu_3 - \mu_1)\beta_{14,r}\beta_{14,s} \\
& + 2\beta_{13,s} \left(b_5(s_{13})^*(u_{10})^*\beta_{11,r} \right. \\
& + (2((s_{13})^*)^2 - 1)(u_{11})^*(I_{6,2} - I_{6,3})((u_{11})^*\beta_{13,r} \\
& \left. \left. - 2(u_{13})^*\beta_{11,r}) \right) \right. \\
& + 2\mu_2 \left(\beta_{5,s}(((u_5)^*)^2((c_5)^*\beta_{3,r} + (s_5)^*\beta_{2,r}) - 2g(s_5)^*\beta_{5,r}) \right. \\
& + (c_4)^*((u_4)^*)^2\beta_{3,r}\beta_{4,s} - (s_4)^*\beta_{4,s}(2g\beta_{4,r} + ((u_4)^*)^2\beta_{2,r}) \left. \right) \quad (32) \\
& + 2(2((s_6)^*)^2 - 1)(u_4)^*(I_{3,1} - I_{3,3})\beta_{6,s}((u_4)^*\beta_{6,r} \\
& - 2(u_6)^*\beta_{4,r}) \\
& + 2(2((s_7)^*)^2 - 1)(u_5)^*(I_{4,1} - I_{4,3})\beta_{7,s}((u_5)^*\beta_{7,r} \\
& - 2(u_7)^*\beta_{5,r}) \\
& + 2(2((s_{12})^*)^2 - 1)(u_{10})^*(I_{5,2} - I_{5,3})\beta_{12,s}((u_{10})^*\beta_{12,r} \\
& \left. \left. - 2(u_{12})^*\beta_{10,r}) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_r = & g(m_4 + 2m_6 - 2\mu_3)\beta_{3,r} - \frac{1}{2}ga_1(m_1 + 2m_5)(\beta_{4,r}(c_4)^* + \beta_{5,r}(c_5)^*) \\
& + b_7\beta_{1,r}(u_1)^* + b_1\beta_{4,r}(u_4)^* + b_2\beta_{5,r}(u_4)^* + b_1\beta_{5,r}(u_5)^* \\
& + b_2\beta_{5,r}(u_5)^* \\
& - \mu_2(2g\beta_{4,r}(c_4)^* + 2g\beta_{5,r}(c_5)^* \\
& + (\beta_{2,r}(c_4)^* + \beta_{3,r}(s_4)^*)((u_4)^*)^2 \\
& + (-\beta_{2,r}(c_5)^* + \beta_{3,r}(s_5)^*)((u_5)^*)^2) + b_2\beta_{6,r}(u_6)^* \\
& + (I_{3,1} - I_{3,3})(c_6)^*(s_6)^*(u_4)^*(\beta_{6,r}(u_4)^* - 2\beta_{4,r}(u_6)^*) \\
& + b_2\beta_{7,r}(u_7)^* \\
& + (I_{4,1} - I_{4,3})(c_7)^*(s_7)^*(u_5)^*(\beta_{7,r}(u_5)^* - 2\beta_{5,r}(u_7)^*) \\
& + b_3(\beta_{8,r}(u_8)^* + \beta_{9,r}(u_9)^*) + b_5\beta_{11,r}(c_{13})^*(u_{10})^* \\
& + 2b_5\beta_{11,r}(u_{11})^* + b_4(\beta_{10,r}(u_{10})^* + \beta_{11,r}(u_{11})^*) \\
& + b_5\beta_{12,r}(u_{12})^* \\
& + (I_{5,2} - I_{5,3})(c_{12})^*(s_{12})^*(u_{10})^*(\beta_{12,r}(u_{10})^* \\
& - 2\beta_{10,r}(u_{12})^*) + b_5\beta_{13,r}(u_{13})^* \\
& + I_{6,2}(c_{13})^*(s_{13})^*(u_{11})^*(\beta_{13,r}(u_{11})^* - 2\beta_{11,r}(u_{13})^*) \\
& + I_{6,3}(c_{13})^*(s_{13})^*(u_{11})^*(-\beta_{13,r}(u_{11})^* + 2\beta_{11,r}(u_{13})^*) \\
& + \frac{1}{2}\beta_{14,r}(ga_3(-\mu_1 + \mu_3)(c_{14})^* + 4b_6(u_{14})^*) \\
& + b_8\beta_{15,r}(u_{15})^*
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\mathbf{E}_r^* = -[\beta_{1,r} \quad \beta_{4,r} \quad \beta_{5,r}] \tag{34}$$

3.9 SIMULAÇÕES DINÂMICAS DIRETAS – MODELO #1 LINEARIZADO

Para realizar simulações dinâmicas diretas com equações linearizadas é preciso primeiramente considerar que tais equações somente refletem de forma aproximada o comportamento apresentado pelo modelo não-linear quando se está em estados que sejam próximos ao ponto de linearização. À

medida que o estado se afasta desse ponto o modelo linear perde representatividade conduzindo a distorções que podem ser cada vez maiores. Contudo, as expressões deduzidas na seção anterior permitem a linearização do sistema em torno de qualquer ponto de seu espaço de trabalho, sem perda de generalidade.

As mesmas simulações que foram realizadas com o modelo #1 utilizando as equações dinâmicas de Kane, lineares e não-lineares, podem ser aqui repetidas utilizando as equações dinâmicas linearizadas, sendo executadas por meio de sucessivas linearizações do sistema em torno de pontos de sua trajetória. Tal procedimento consistirá em definir um determinado número de intervalos em relação ao tempo total de integração, promovendo para cada intervalo uma integração utilizando uma linearização em torno do ponto correspondente ao estado inicial deste intervalo. Ou seja, supondo que cada intervalo destes contenha N_p passos de integração, dadas as condições iniciais, lineariza-se o modelo em torno deste ponto, faz-se os N_p passos de integração, e troca-se o modelo utilizado para um linearizado em torno do ponto final deste intervalo, que será o primeiro ponto do próximo intervalo, sobre o qual serão feitos outros N_p passos de integração.

Novamente, os resultados mostrados nos gráficos a seguir referem-se apenas às equações dinâmicas de Kane, dado que os desvios observados entre as metodologias não excediam 7 mm nas simulações realizadas e além disso, os resultados fornecidos pela linearização das equações de Kane são ligeiramente mais próximos dos resultados obtidos pelo modelo não-linear que os resultados da metodologia de Lagrange. Os resultados das simulações são obtidos para 1000 passos de integração, com intervalos de 20 passos por linearização.

De forma geral, os comportamentos observados referentes à presença de atrito são os mesmos que nas simulações das equações não-lineares e, além disso, os desvios observados entre os modelos linear e não-linear não são excessivamente comprometedores em termos da utilização dessas

equações mais simplificadas para o projeto de um sistema de controle do mecanismo. Além disso, solicitando que o software calculasse o tempo requerido para simulação, verificou-se que a simulação direta linearizada discreta é cerca de 10 vezes mais rápida em termos computacionais que a simulação do modelo não-linear completo. Isso representa uma grande vantagem se o modelo for utilizado para a síntese de controladores em tempo real, por exemplo.

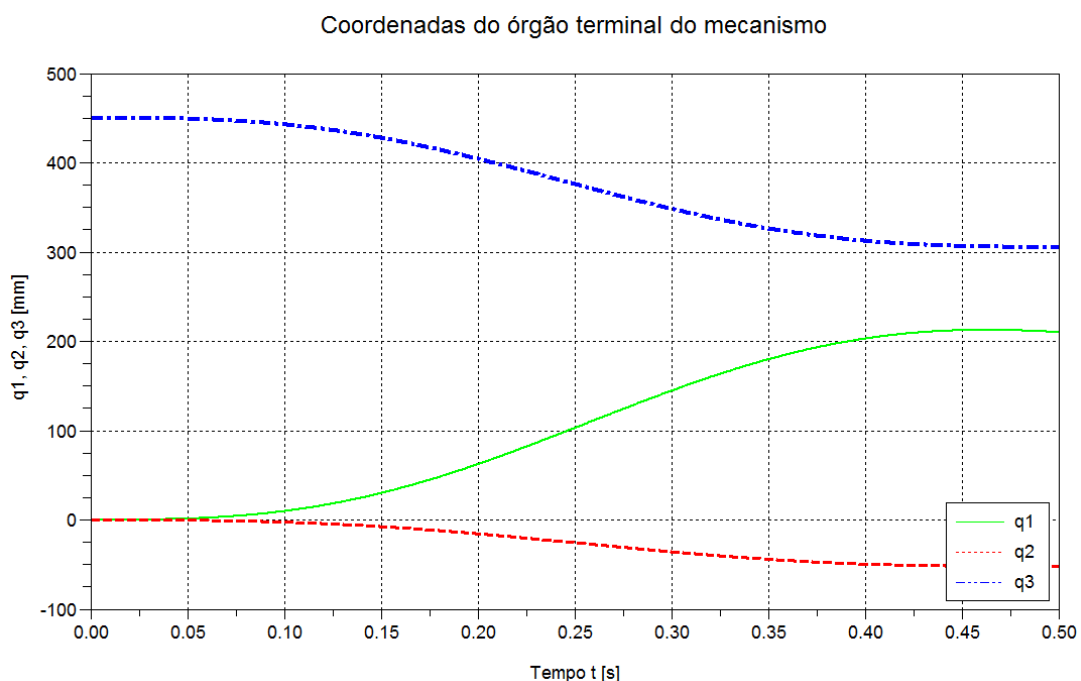


Gráfico 53 – Simulação A0 linear: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

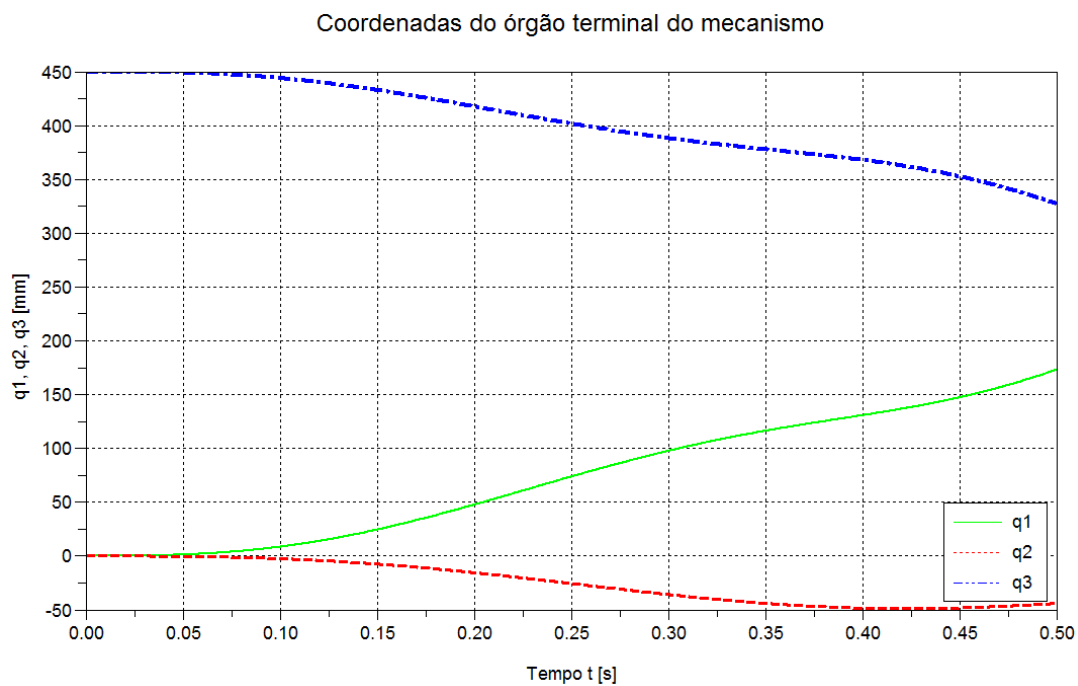


Gráfico 54 – Simulação B0 linear: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

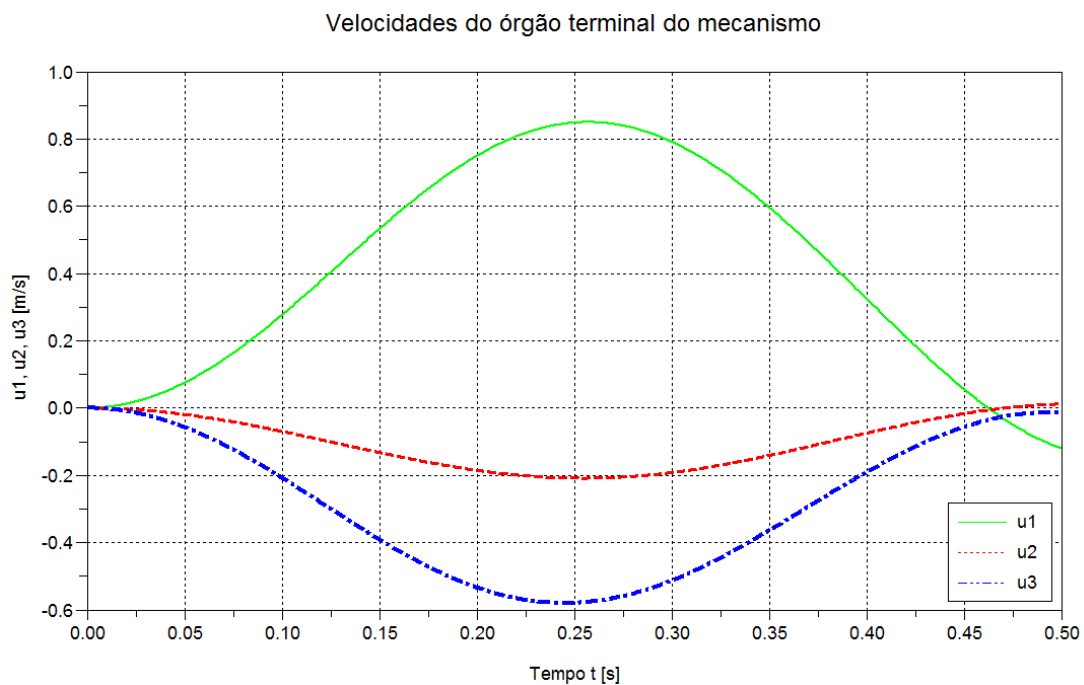


Gráfico 55 – Simulação A0 linear: Velocidades do órgão terminal do mecanismo

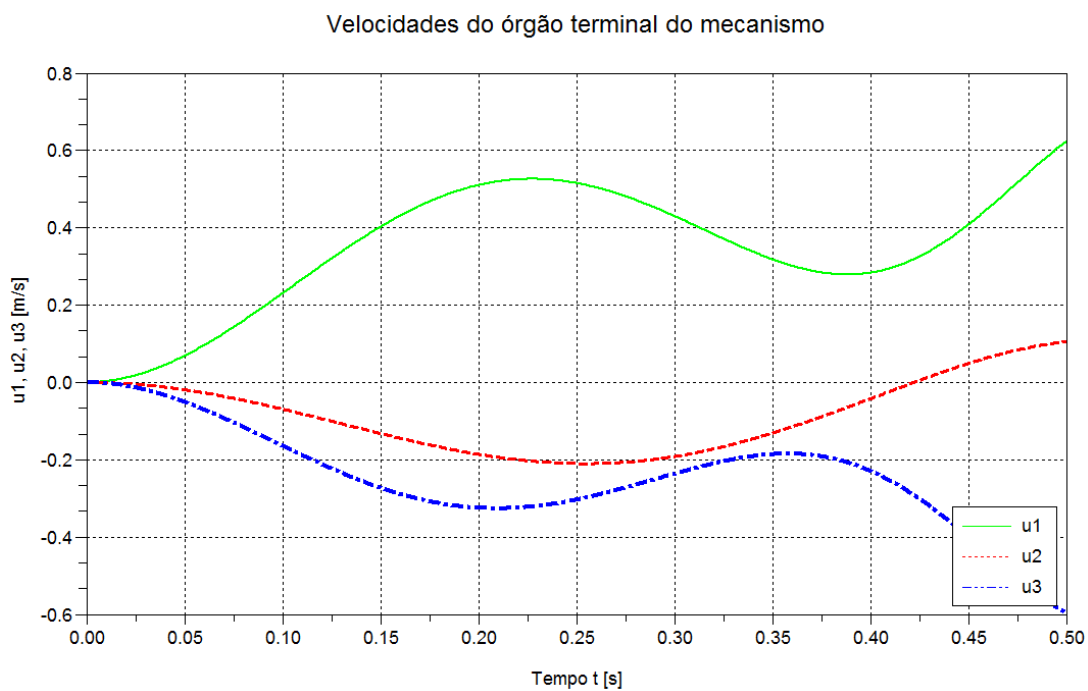


Gráfico 56 – Simulação B0 linear: Velocidades do órgão terminal do mecanismo

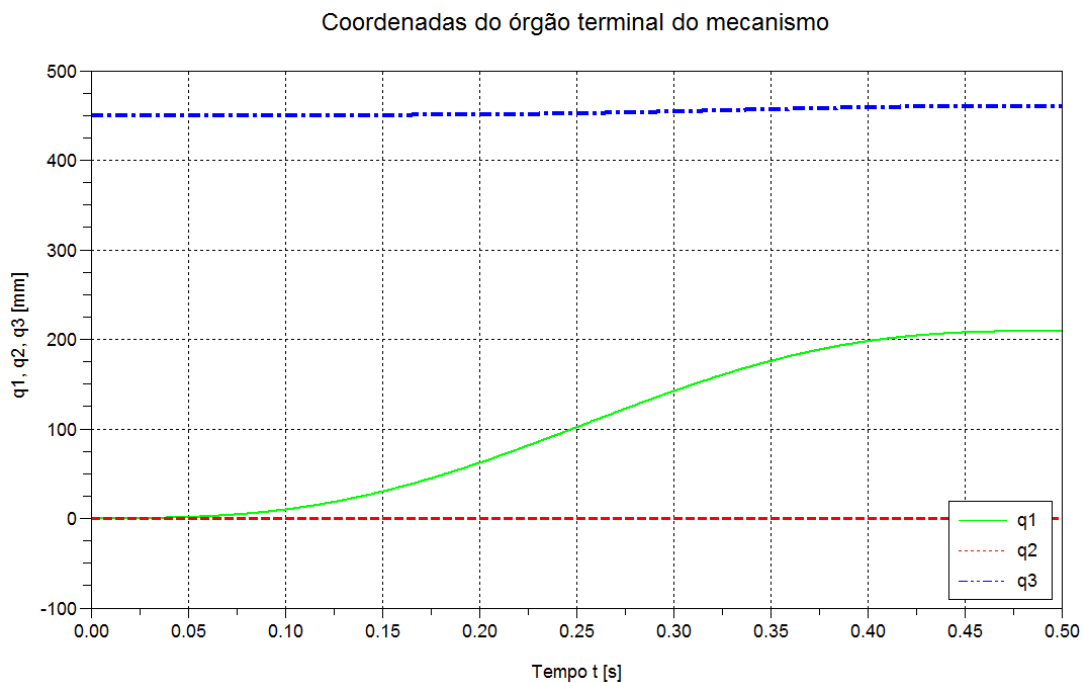


Gráfico 57 – Simulação A1 linear: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

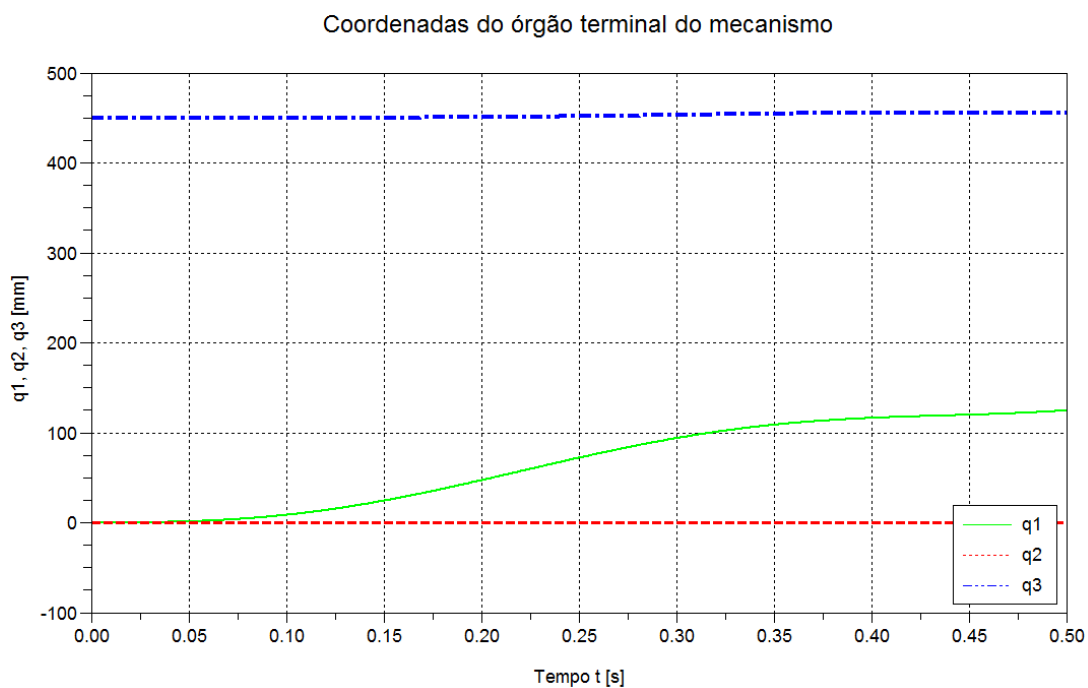


Gráfico 58 – Simulação B1 linear: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

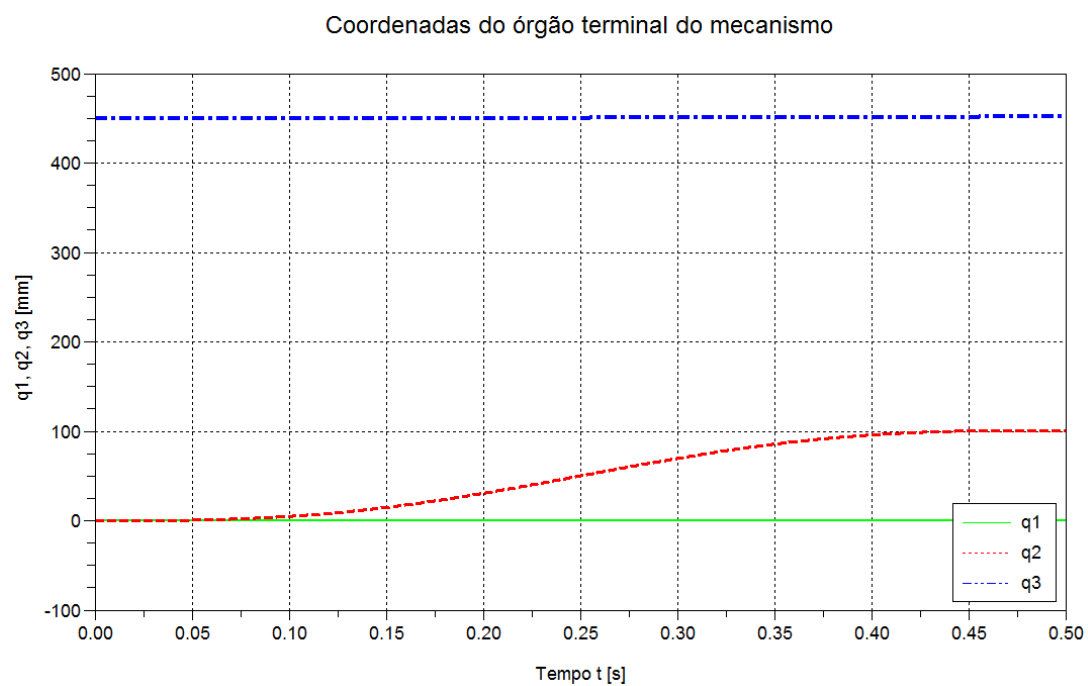


Gráfico 59 – Simulação A2 linear: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

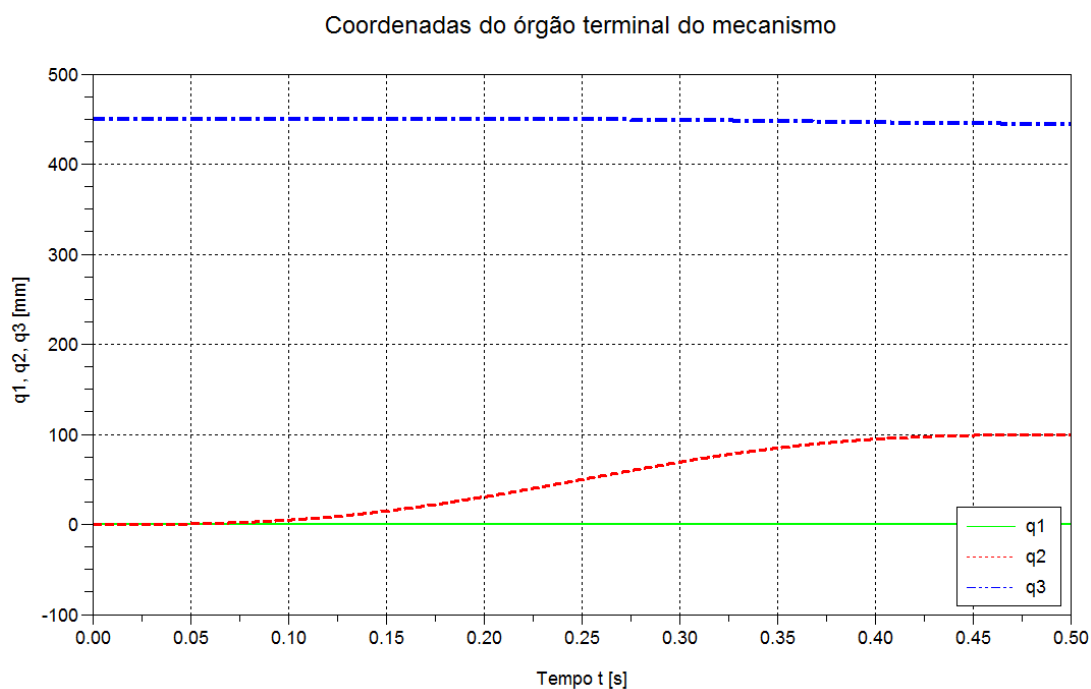


Gráfico 60 – Simulação B2 linear: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

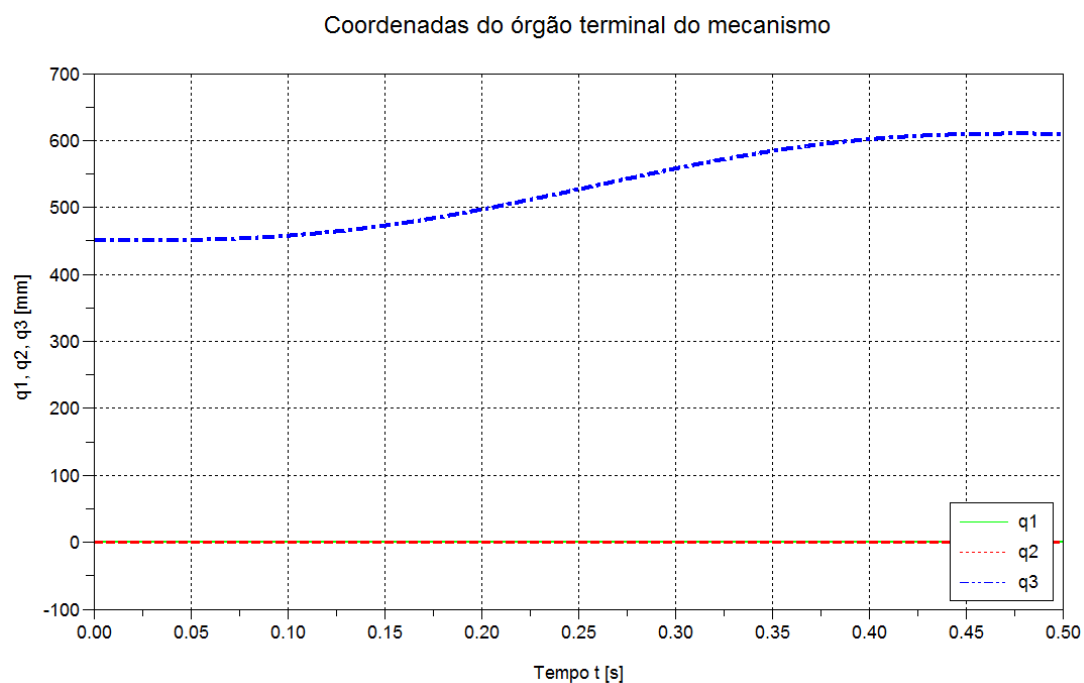


Gráfico 61 – Simulação A3 linear: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

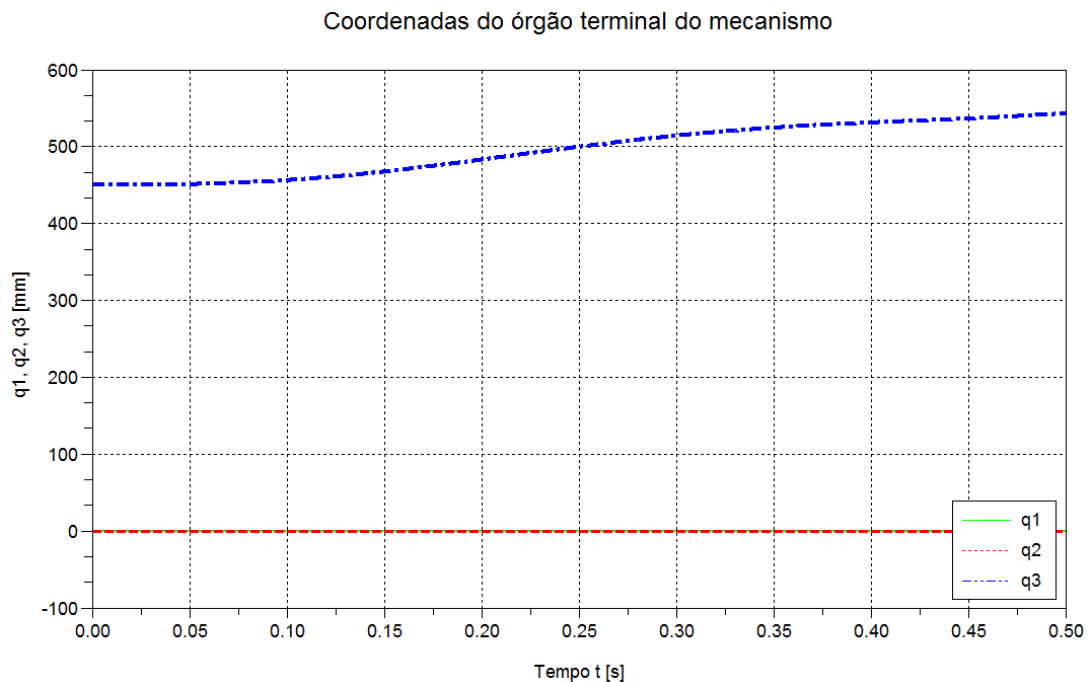


Gráfico 62 – Simulação B3 linear: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

3.10 EQUAÇÕES DINÂMICAS DE KANE – MODELO #2

O procedimento de dedução das equações dinâmicas aqui adotado é idêntico ao detalhado na seção 3.4, não sendo necessária a repetição da metodologia.

No tocante às expressões das forças ativas generalizadas não-holonômicas há total semelhança entre a obtenção das mesmas com relação à expressão geral definida na equação (19) a menos das expressões das velocidades parciais não-holonômicas e velocidades angulares parciais não-holonômicas que são distintas neste modelo justamente pela inclusão das coordenadas q_{16} e q_{17} e dos esforços elásticos. Estes últimos, por sua natureza conservativa podem ter suas expressões de forças ativas generalizadas calculadas de uma forma mais simples a partir das expressões das energias

potenciais elásticas associadas. Sabe-se que a expressão da energia potencial elástica associada ao mecanismo pode ser genericamente dada por:

$$V_E = \frac{1}{2}(k_1 q_{16}^2 + k_2 q_{17}^2) \quad (35)$$

Segundo Kane [1], dada a expressão genérica de energia potencial associada a um determinado esforço, no particular caso em que todos os $u_i = \dot{q}_i$ para $i = 1, \dots, n$, como está sendo adotado neste estudo, as forças ativas generalizadas não-holonômicas associadas a este particular esforço podem ser calculadas por meio da seguinte expressão: $(\bar{F}_r)_E = -\partial \dot{V}_E / \partial \dot{q}_r$.

As forças de inércia generalizadas não-holonômicas por sua vez são calculadas de forma idêntica ao apresentado na seção 3.4, porém agora com as expressões de velocidades e acelerações completas, considerando também como coordenadas q_{16} e q_{17} . Tal consideração resulta em expressões análogas, porém muitíssimo extensas, de tal forma que não serão reproduzidas neste texto.

A expressão geral para as forças generalizadas ativas não-holonômicas por suas vez apresenta uma expressão mais simples, pois, conforme discutido acima, há apenas a inclusão dos esforços elásticos e a mudança nas expressões das velocidades parciais não-holonômicas, resultando em (para $r = 1, \dots, 7$):

$$\begin{aligned}
\bar{F}_r = & \tau_1\beta_{1,r} + \tau_2\beta_{4,r} + \tau_3\beta_{5,r} - k_1q_{16}\beta_{16,r} - k_2q_{17}\beta_{17,r} - b_1(u_4\beta_{4,r} \\
& + u_5\beta_{5,r}) - b_2((u_4 + u_5)\beta_{5,r} + u_6\beta_{6,r} + u_7\beta_{7,r}) \\
& + b_3(-u_8\beta_{8,r} - u_9\beta_{9,r}) - b_4(u_{10}\beta_{10,r} + u_{11}\beta_{11,r}) \\
& - b_5((c_{13}u_{10} + 2u_{11})\beta_{11,r} + u_{12}\beta_{12,r} + u_{13}\beta_{13,r}) \\
& - 2b_6u_{14}\beta_{14,r} - b_7u_{15}\beta_{15,r} - b_8u_{15}\beta_{15,r} \\
& + \frac{1}{2}g \left(2(m_4 + 2m_6)\beta_{3,r} + c_{14}a_3m_3\beta_{14,r} \right. \\
& + (m_1 + 2m_5)(a_1(c_4\beta_{4,r} + c_5\beta_{5,r}) \\
& - q_{16}(c_6s_4\beta_{4,r} + c_4s_6\beta_{6,r}) - q_{17}(c_7s_5\beta_{5,r} + c_5s_7\beta_{7,r}) \\
& + c_4c_6\beta_{16,r} + c_5c_7\beta_{17,r}) \\
& + m_2(2\beta_{3,r} + a_1(c_4\beta_{4,r} + c_5\beta_{5,r}) \\
& - q_{16}(c_6s_4\beta_{4,r} + c_4s_6\beta_{6,r}) - q_{17}(c_7s_5\beta_{5,r} + c_5s_7\beta_{7,r}) \\
& \left. + c_4c_6\beta_{16,r} + c_5c_7\beta_{17,r}) \right)
\end{aligned} \tag{36}$$

3.11 SIMULAÇÕES DINÂMICAS DIRETAS – MODELO #2

De maneira análoga aos procedimentos realizados na seção 3.7, os esforços obtidos por simulação dinâmica inversa e correspondentes à realização das trajetórias 0, 1, 2 e 3 (vide tabela 18) para as simulações do tipo A (modelo #1, rígido e com atritos nas juntas desprezíveis) podem ser aplicados às simulações deste modelo #2 (tipo C, com atrito desprezível e tipo D com atrito considerado) a fim de verificar o quanto as trajetórias obtidas diferem das trajetórias previstas nas simulações A. Novamente, isso é uma maneira de verificar o quanto os efeitos de elasticidade individualmente são capazes de influenciar na dinâmica do sistema. Isso permitirá estabelecer uma comparação da relevância da inclusão destes com relação aos demais efeitos dinâmicos considerados, o que permitirá analisar se realmente é viável a adição de complexidade ao modelo para o estudo destes (pois no caso destes efeitos de elasticidade, foi necessária a elaboração de um novo

modelo, com maior número de graus de liberdade e com significativa complexidade adicional nas equações dinâmicas).

Os resultados das simulações numéricas de dinâmica direta dos tipos C e D são apresentados nos gráficos a seguir.

Comparando os resultados obtidos por meio destas simulações com os resultados obtidos a partir das simulações do modelo #1 (seção 3.7), nota-se que a presença de ambos dos efeitos é pouco significativa para a dinâmica do mecanismo, dado que provocam alterações imperceptíveis em sua trajetória se confrontados com o modelo rígido, onde tais efeitos são desprezados por simplificação (simulações A e B), apesar de trazerem flutuações perceptíveis nas acelerações deste. O erro do posicionamento do órgão terminal deste mecanismo não é demasiadamente afetado em nenhuma das situações simuladas pela inclusão dos efeitos de elasticidade, sendo os efeitos de atrito bastantes mais significativos nesse quesito. De fato, observa-se que os efeitos de deflexão de molas equivalentes à elasticidade dos componentes têm amplitudes mais de 100 vezes menores que as amplitudes do movimento do órgão terminal do mecanismo.

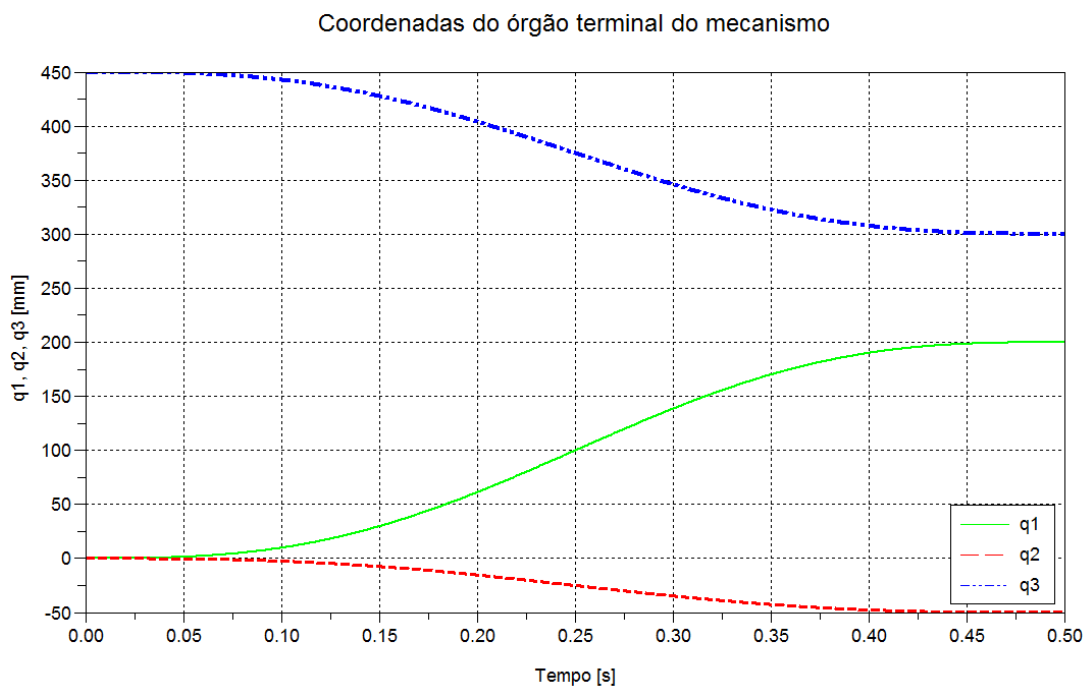


Gráfico 63 – Simulação C0: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

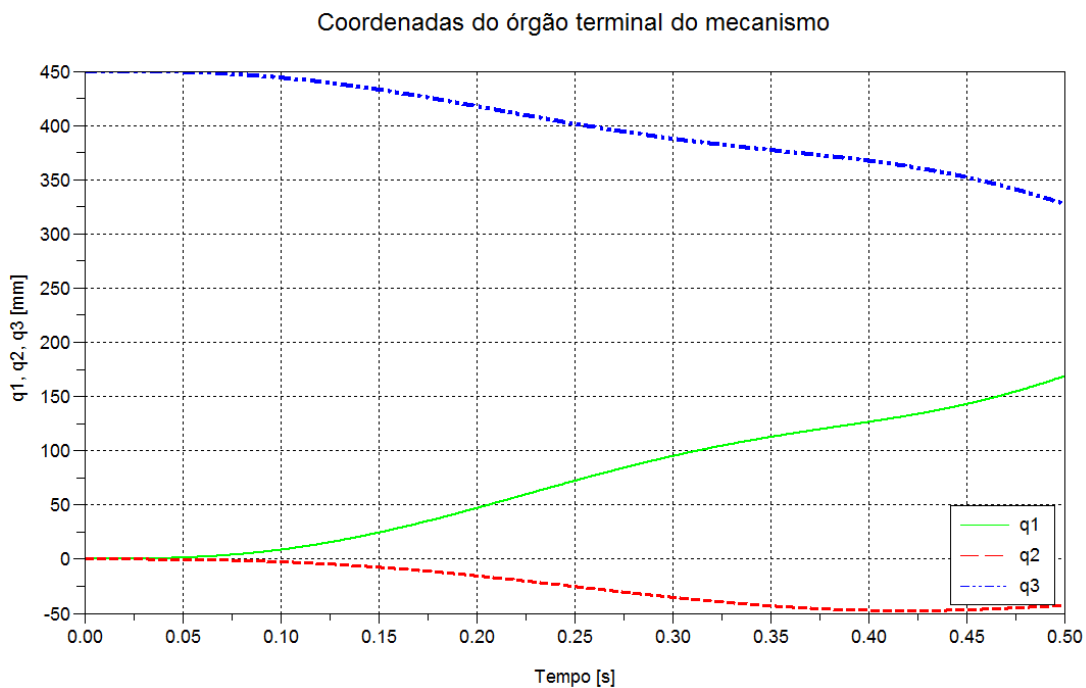


Gráfico 64 – Simulação D0: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

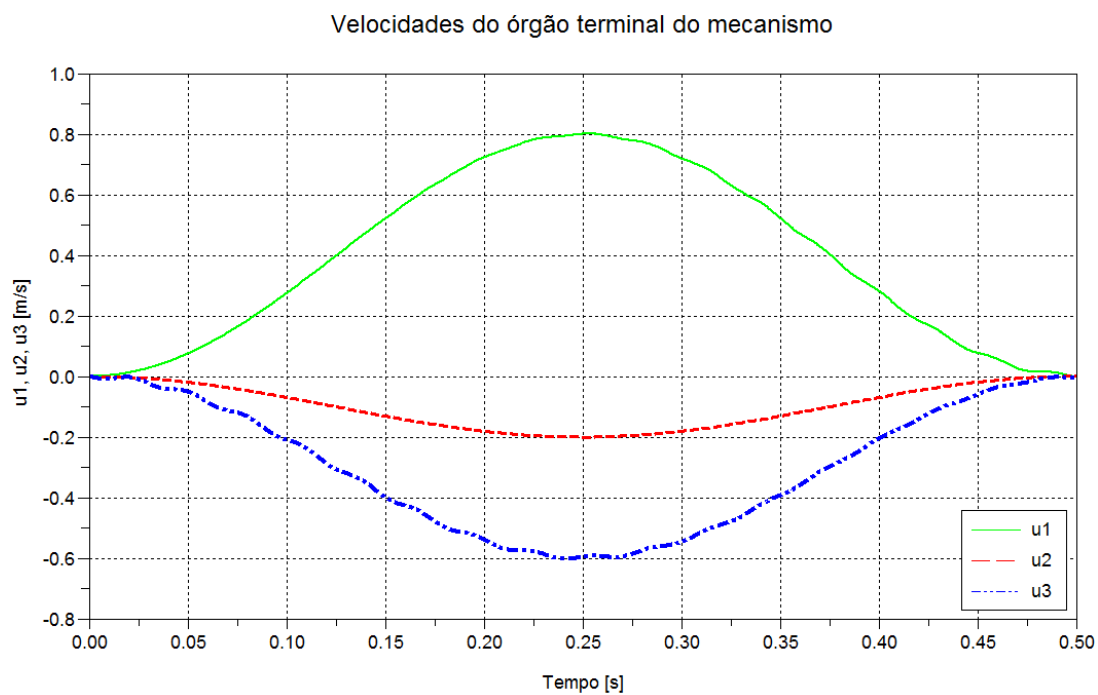


Gráfico 65 – Simulação C0: Velocidades do órgão terminal do mecanismo

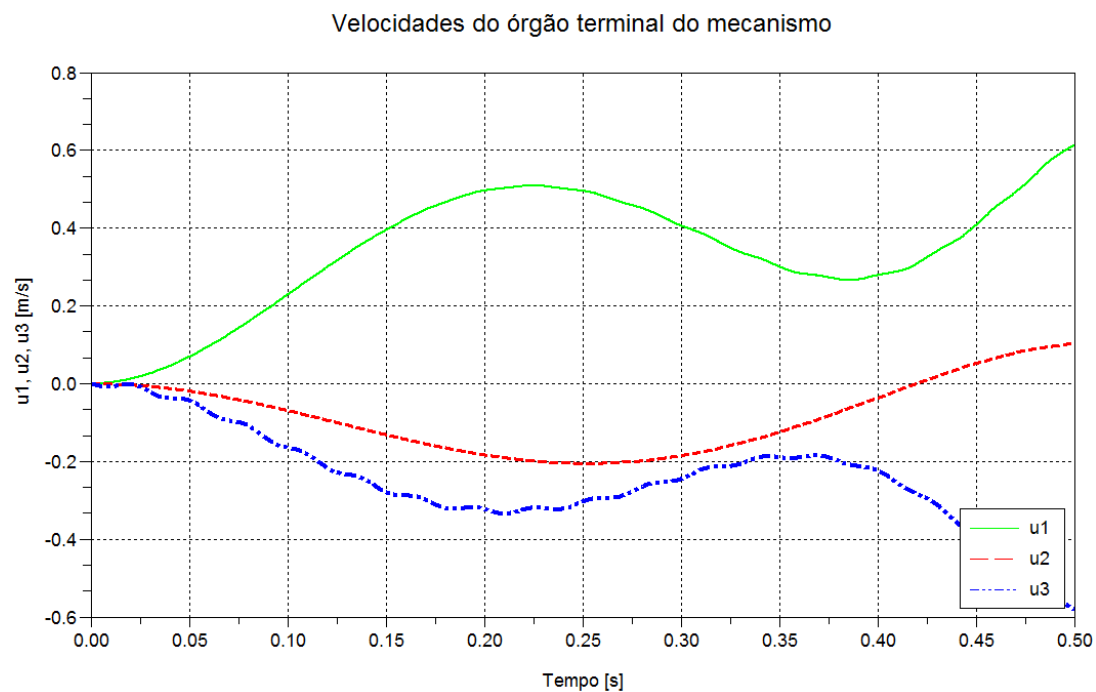
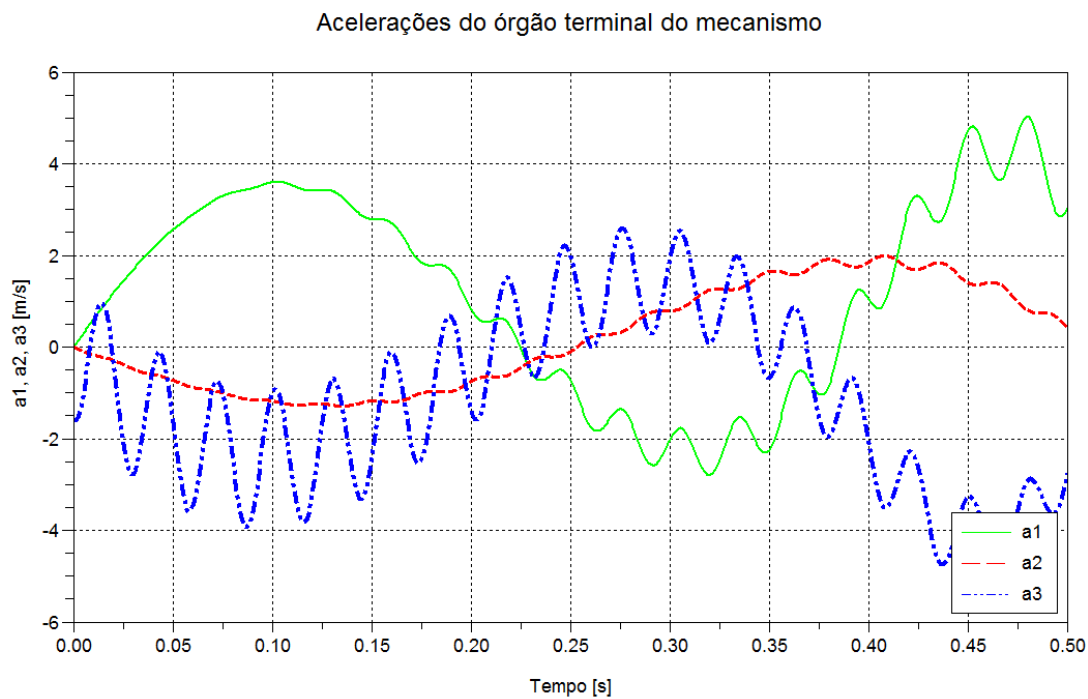
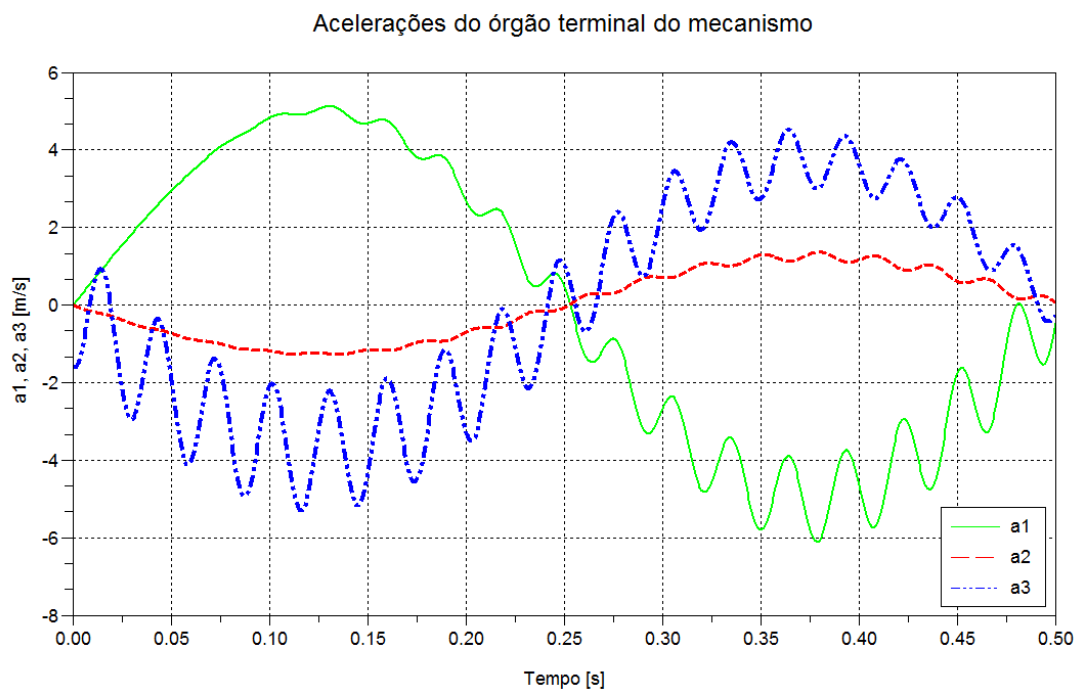


Gráfico 66 – Simulação D0: Velocidades do órgão terminal do mecanismo



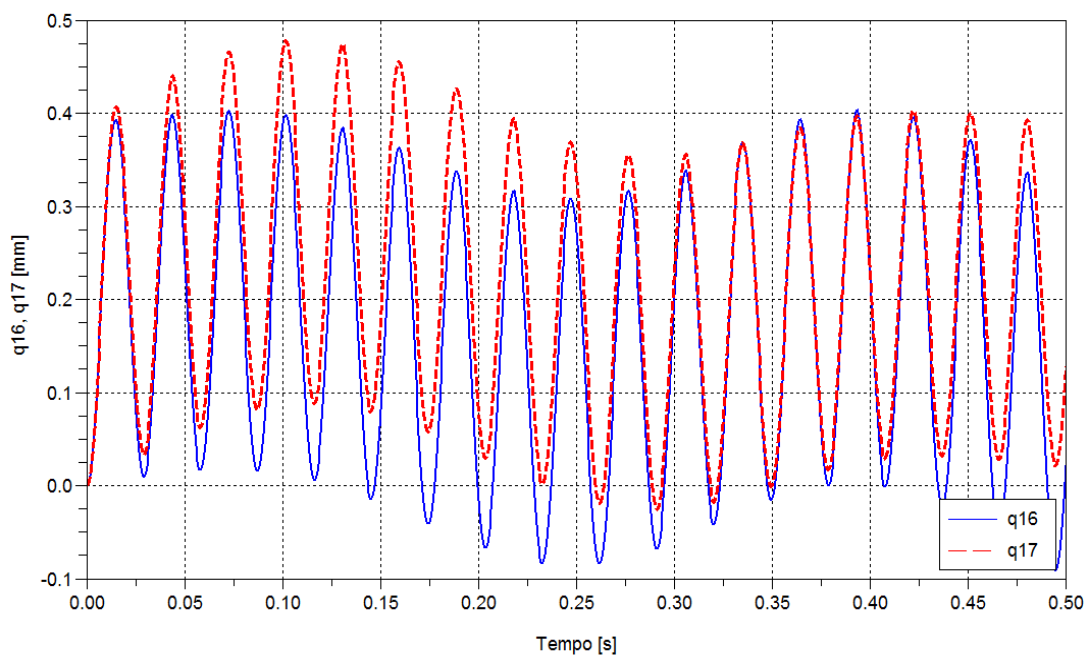


Gráfico 69 – Simulação C0: Deflexões das molas equivalentes à elasticidade dos corpos B_1 e B_2

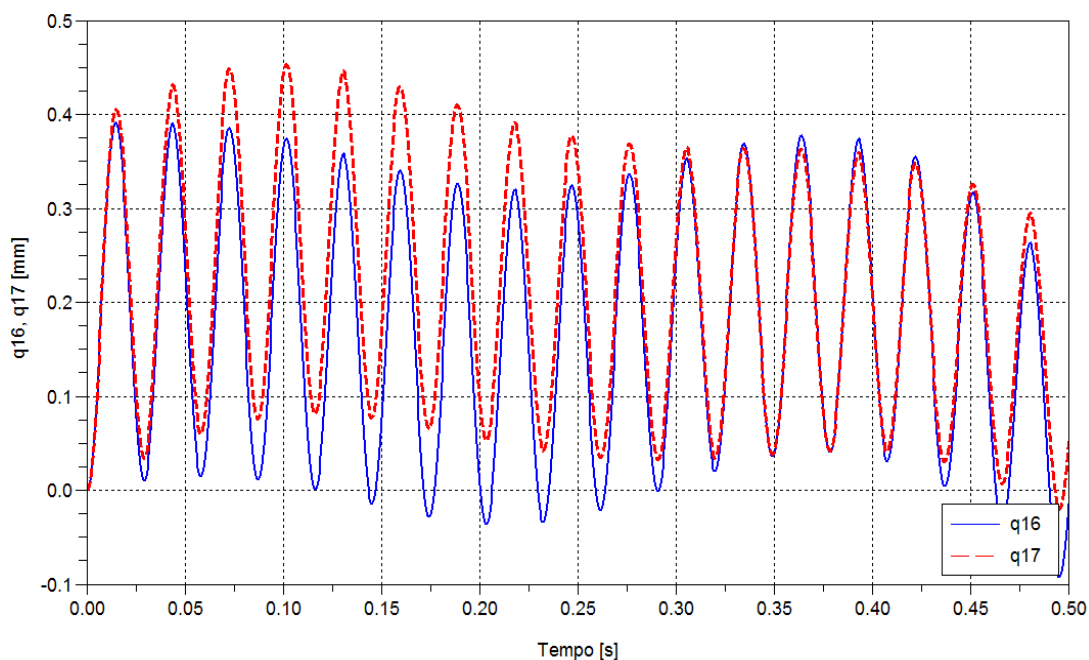


Gráfico 70 – Simulação D0: Deflexões das molas equivalentes à elasticidade dos corpos B_1 e B_2

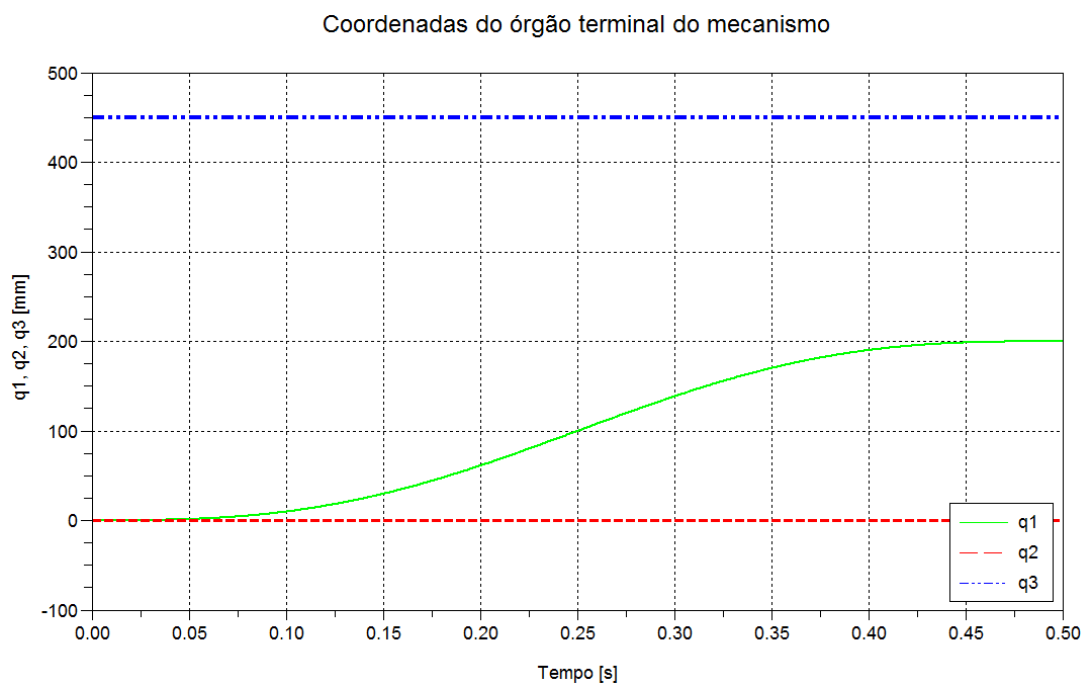


Gráfico 71 – Simulação C1: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

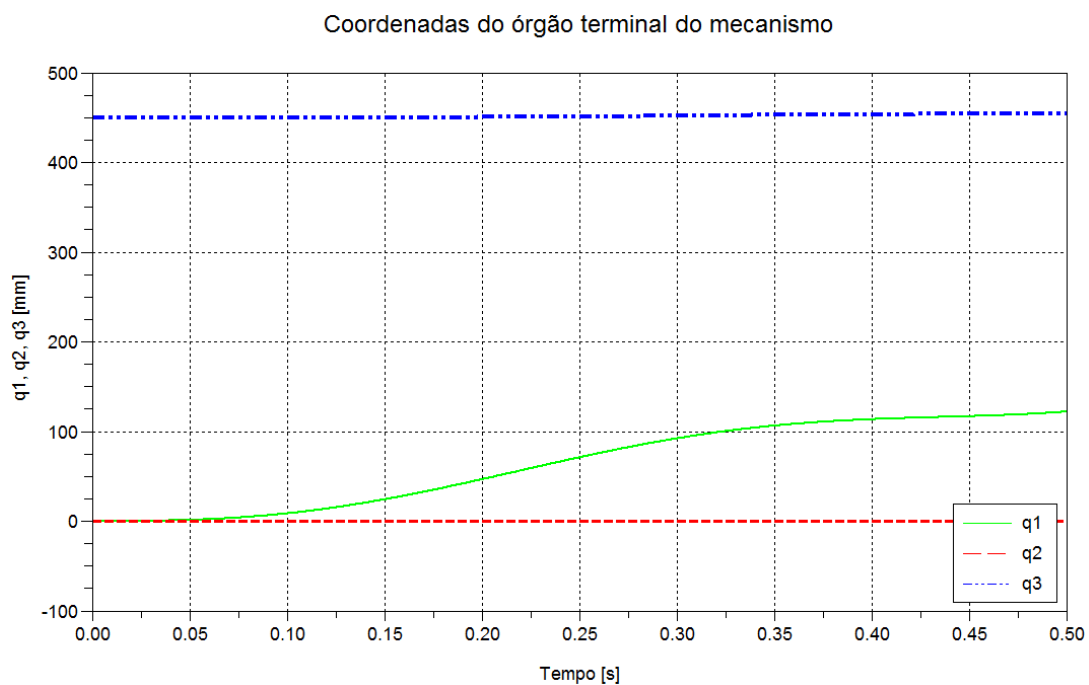


Gráfico 72 – Simulação D1: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

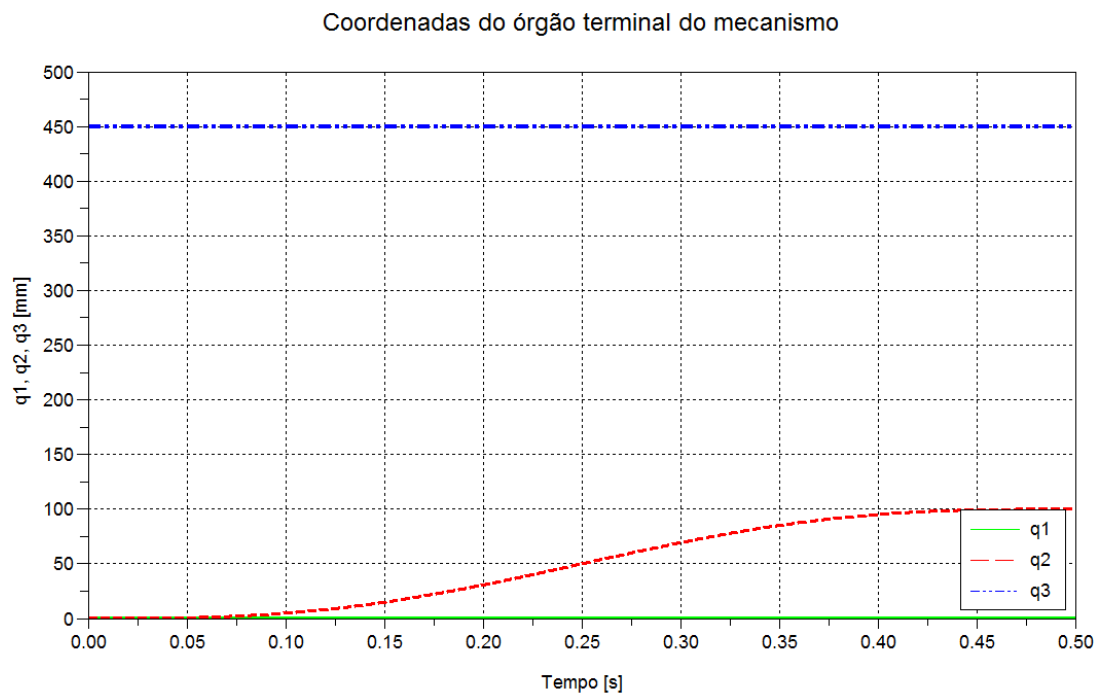


Gráfico 73 – Simulação C2: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

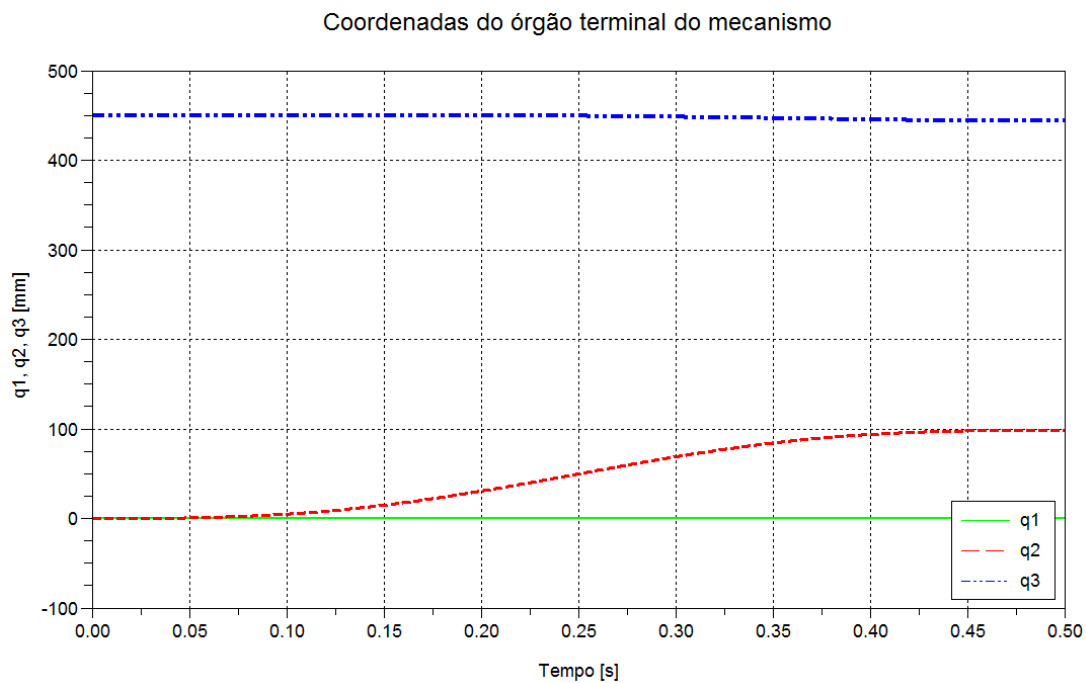


Gráfico 74 – Simulação D2: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

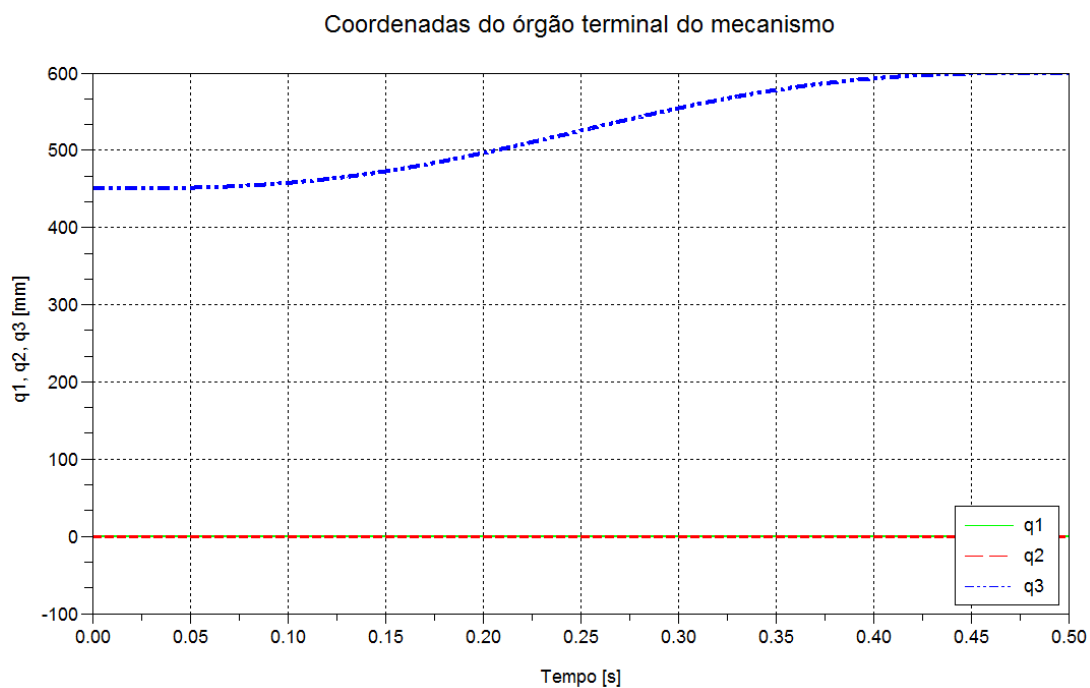


Gráfico 75 – Simulação C3: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

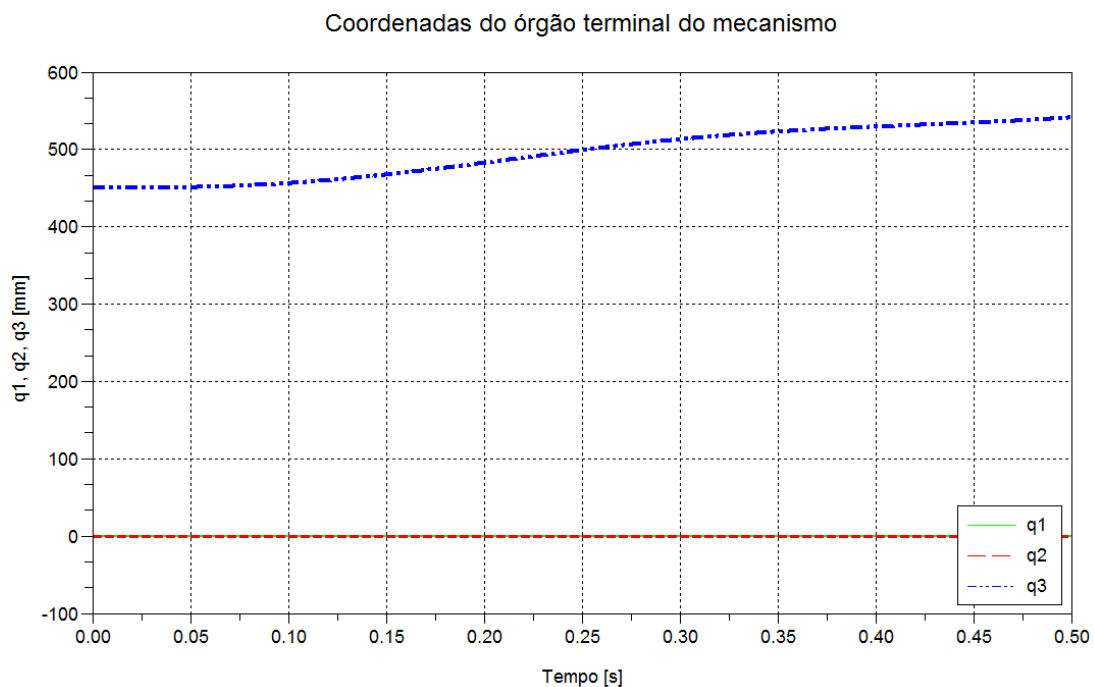


Gráfico 76 – Simulação D3: Coordenadas do movimento do órgão terminal do mecanismo

4 CONCLUSÕES

4.1 ANÁLISE DA RELEVÂNCIA DE PARÂMETROS E EFEITOS DINÂMICOS

Analizando todas as etapas do desenvolvimento da modelagem dinâmica do mecanismo realizadas, pode-se afirmar que fundamentalmente foram considerados efeitos dinâmicos de cinco naturezas distintas nos modelos elaborados: efeitos de inércia, devidos ao campo gravitacional, devidos aos atuadores do sistema, de atrito e de elasticidade. Realizando uma comparação entre todas as simulações apresentadas é possível discutir a relevância de cada um desses efeitos na dinâmica do mecanismo como um todo, dado que os parâmetros utilizados nas simulações, bem como as situações simuladas são idênticas em todos os casos apresentados.

Para tal, devem-se analisar quais exatamente foram os efeitos considerados em cada modelo simulado. O modelo #1 (vide seções 0 a 3.9) considera fundamentalmente os efeitos de inércia, os devidos aos atuadores, ao campo gravitacional e ao atrito viscoso nas juntas. O modelo #2 (vide seções 3.10 e 3.11) ainda contempla os efeitos de elasticidade.

Uma simples análise das simulações permite concluir que os efeitos dinâmicos mais significativos no modelo são os efeitos de inércia e os devidos aos atuadores, que praticamente regem quase completamente o comportamento do mecanismo. Tal constatação é perfeitamente coerente, dado que o sistema tem primordialmente a característica de operar em velocidades elevadas e com grandes níveis de acelerações e desacelerações. O fato de as inércias dos corpos que constituem este mecanismo serem bastante baixas favorece que tais acelerações e desacelerações sejam obtidas sem exigir um grande nível de esforços provenientes dos atuadores. Além disso, o baixo valor destas inércias

conduz a uma não tão elevada relevância dos efeitos gravitacionais, que só passam a ser mais significativos em movimentos nos quais a translação vertical do órgão terminal é elevada.

Os efeitos de atrito e elasticidade, no presente caso, podem ser entendidos meramente como desvios de comportamento em relação à dinâmica do mecanismo dito ideal, no qual há somente efeitos de inércia, atuadores e gravitacionais. Tais desvios são significativos e perceptíveis nas simulações realizadas, e são importantes para a compreensão do comportamento do mecanismo enquanto sistema dinâmico, não podendo ser desprezados se for desejado que o modelo corresponda com precisão à realidade. Contudo, em termos de ordem de grandeza não têm tanta significância quanto os efeitos de inércia e dos atuadores, podendo ser desprezados numa primeira aproximação sem que isso comprometa seriamente a compreensão da dinâmica do mecanismo.

Analisando relativamente os efeitos de atrito e de elasticidade, principalmente no tocante ao movimento do órgão terminal do mecanismo (que é sua parte mais relevante em termos do estudo da dinâmica do mesmo), observa-se que os primeiros são bastante mais relevantes que os segundos em termos dos desvios de posição observados neste corpo. Contudo, quando se consideram os efeitos de elasticidade dos componentes, ocorrem movimentos vibratórios bastante significativos, que apesar da baixa amplitude, acabam por influir de forma razoavelmente significativa nas acelerações dos componentes, o que conduz à relevância destes em casos nos quais se deseje utilizar o modelo para avaliar os esforços estruturais no mecanismo, por exemplo.

O nível de simplificação do modelo depende do quão próximo se deseja que ele seja da realidade. De forma geral, para que tenha alguma representatividade é fundamental que o modelo dinâmico do mecanismo minimamente inclua os efeitos de inércia e dos atuadores. O trabalho desenvolvido por Almeida [4] envolve a elaboração de um modelo dinâmico deste mecanismo, e considera em uma primeira aproximação um modelo

concebido com efeitos de atuadores, gravidade e inércia como se o mesmo fosse constituído somente por massas concentradas. Pelos resultados obtidos nota-se que a aproximação produz resultados satisfatórios em comparação com os obtidos considerando os corpos que constituem o mecanismo como corpos rígidos extensos, mostrando que mesmo modelos mais simples que os desenvolvidos neste trabalho podem ser adequados dependendo do quão próximo da realidade se deseja que o modelo se comporte.

Dessa forma, existe um compromisso entre o quão representativo com relação à realidade se deseja que um modelo seja e o quão complexo o mesmo será, uma vez que uma maior representatividade envolverá uma maior complexidade das equações dinâmicas do mecanismo, o que por outro lado é indesejável dadas as grandes dificuldades que se tem em simular equações excessivamente complexas.

Para a finalidade de controle do mecanismo, por exemplo, pode-se afirmar que um modelo que inclua somente os efeitos de atrito além dos fundamentais (atuadores e inércia) e da gravidade, como o modelo #1, parece ser bastante adequado, pois mesmo quando se incluem os efeitos de elasticidade poucas alterações de comportamento se observam em relação a este modelo. Em particular toda a síntese de um sistema de controle para o mecanismo pode ser desenvolvida com base na versão linearizada deste modelo, apresentada na seção 3.8, dada a grande simplicidade formal destas equações e do fato de que existem grandes variedades de ferramentas bem desenvolvidas para o controle de sistemas que podem ser modelados por meio de equações dinâmicas lineares (conforme discutido na seção 2.8), uma vez que a simulação destas conduz a resultados tão bons quanto os obtidos pela simulação linear (contanto que a simulação seja executada conforme descrito).

4.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De forma geral, o estudo aqui apresentado cumpriu todos os objetivos propostos, tendo sido desenvolvida uma metodologia para a modelagem de sistemas multicorpos aplicável não somente ao particular mecanismo paralelo estudado, como a diversos outros sistemas mecânicos nos quais os efeitos dinâmicos tiverem comportamento semelhante ao modelado neste estudo. As metodologias de Lagrange e de Kane apresentam-se bastante vantajosas, sendo a última mais vantajosa em termos formais (equações possuem formatos semelhantes, o que facilita sua dedução) e computacionais (o tempo requerido para simulações com estas equações é menor dada a maior simplicidade dos algoritmos requeridos para simulá-las, o que se deve ao fato de a mesma dispensar a utilização dos multiplicadores indeterminados, que requerem cálculos adicionais para sua eliminação) além de mais facilmente linearizáveis (e de sua linearização produzir resultados ligeiramente melhores que as obtidas pela linearização das equações dinâmicas de Lagrange). Os algoritmos e rotinas computacionais desenvolvidos também apresentam elevada qualidade produzindo resultados com erros numéricos insignificantes, que não comprometem a validade dos mesmos. Tais algoritmos também têm a pretensão de ter uso universal, podendo ser facilmente adaptáveis para equações dinâmicas de Lagrange e de Kane de qualquer sistema dinâmico, praticamente não havendo particularidades que sejam exclusivas do mecanismo modelado.

Os experimentos realizados permitiram a determinação de uma série de parâmetros e a estimativa de muitos outros, de tal sorte que os resultados produzidos efetivamente devem refletir o funcionamento real do protótipo em construção, sendo extremamente úteis para aplicações práticas dos modelos desenvolvidos, em particular para o desenvolvimento de sistemas de controle para o mesmo. Além disso, os resultados dos experimentos para a determinação das propriedades de atrito mostraram a existência de uma

significativa correlação entre as forças de atrito no mecanismo e as velocidades ou velocidades angulares relativas nas juntas do mesmo.

O horizonte de aplicação imediato do presente estudo, dando continuidade ao mesmo é o projeto de um sistema de controle para o mecanismo, sendo tal projeto baseado em algum dos modelos aqui desenvolvidos. O desenvolvimento de tal sistema permitirá a utilização do mecanismo para atividades práticas, servindo como um manipulador robótico com excelente desempenho em termos de velocidade de movimentação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] KANE, T. R.; LEVINSON, D. A. *Dynamics: Theory and Applications*. McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering. McGraw-Hill Publishing Company. USA, 1985.
- [2] MANN, H. *Modeling and Simulation*. DynLab: Course on Dynamics of Multidisciplinary and Controlled Systems. Czech Technical University in Prague, 2006.
- [3] HESS-COELHO, T. A. *Metodologia para análise e síntese de mecanismos*. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2008.
- [4] ALMEIDA, R. Z. H.; HESS-COELHO. *Dynamic Modeling and Analysis of a 3-DOF Asymmetric Parallel Mechanism*. The First IFToMM Asian Conference on Mechanism and Machine Science. Departamento de Engenharia Mecatrônica e Sistemas Mecânicos da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2010.
- [5] BUFFINGTON, K. W. *Kane's Method in Robotics*. Robotics and Automation Handbook. CRC Press LLC, 2005.
- [6] BOTTEMA, O., ROTH, B. *Theoretical Kinematics*. Dover Publications, Inc. New York, United States, 1990.
- [7] LEECH, J. W. *Mecânica Analítica*. Ao Livro Técnico S.A. e Editora da Universidade de São Paulo. Rio de Janeiro, Brasil, 1971.
- [8] TSAI L.-W. *Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators*. John Wiley and Sons. United States, 1999.
- [9] FRIEDLAND, Bernard. *Control System Design: An Introduction to State-Space Methods*. Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2005.

- [10] DEN HARTOG, J. P. *Mechanical Vibrations*. Dover Publications, Inc. New York, 1985.

APÊNDICE A – COMPLEMENTOS DE METODOLOGIA

A.1 TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS

Para que grandezas medidas em diversos referenciais com coordenadas em diversos sistemas de referência possam ser relacionadas, existe a necessidade de definição das transformações algébricas apropriadas.

Suponha dois sistemas de coordenadas S_i e S_j cujas bases ortonormais positivas associadas sejam respectivamente $(\mathbf{e}_1^i, \mathbf{e}_2^i, \mathbf{e}_3^i)$ e $(\mathbf{e}_1^j, \mathbf{e}_2^j, \mathbf{e}_3^j)$. Considere ainda que sejam definidos:

$$R_{rs}^{ij} = \mathbf{e}_r^i \cdot \mathbf{e}_s^j \quad \text{para} \quad r, s = 1, 2, 3 \quad (37)$$

Dessa forma, um vetor $\mathbf{r}$ pode ser determinado por suas coordenadas escritas em cada uma das bases por meio das seguintes relações:

$$\mathbf{r} = \sum_{r=1}^3 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_r^i) \mathbf{e}_r^i = \sum_{s=1}^3 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_s^j) \mathbf{e}_s^j \quad (38)$$

Contudo, os versores também podem ser relacionados por meio de equações da forma:

$$\mathbf{e}_s^j = \sum_{r=1}^3 (\mathbf{e}_s^j \cdot \mathbf{e}_r^i) \mathbf{e}_r^i \stackrel{(37)}{=} \sum_{r=1}^3 R_{rs}^{ij} \mathbf{e}_r^i \quad \text{para} \quad s = 1, 2, 3 \quad (39)$$

Dessa forma, manipulando algebricamente as equações, obtém-se:

$$\mathbf{r} \stackrel{(38)}{=} \sum_{s=1}^3 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_s^j) \mathbf{e}_s^j \stackrel{(39)}{=} \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 R_{rs}^{ij} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_s^j) \mathbf{e}_r^i \stackrel{(38)}{=} \sum_{r=1}^3 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_r^i) \mathbf{e}_r^i \quad (40)$$

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_r^i) = \sum_{s=1}^3 R_{rs}^{ij} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_s^j) \quad \text{para} \quad r = 1, 2, 3 \quad (41)$$

Dessa forma, pela equação (41), nota-se que existe uma matriz ${}^{S_i}\mathbf{R}_{S_j}$, formada pelos R_{rs}^{ij} , que converte as coordenadas de um vetor $\mathbf{r}$ da base associada a um sistema de coordenadas S_j para a base associada a um sistema de coordenadas S_i . Em particular, no caso de a base $(\mathbf{e}_1^j, \mathbf{e}_2^j, \mathbf{e}_3^j)$ ser produzida por uma rotação de ϕ da base $(\mathbf{e}_1^i, \mathbf{e}_2^i, \mathbf{e}_3^i)$ em torno da direção definida pelo versor $\mathbf{e}_r^i$, a matriz ${}^{S_i}\mathbf{R}_{S_j}$, formada pelos R_{rs}^{ij} , pode ser dada por:

r	1	2	3
${}^{S_i}\mathbf{R}_{S_j}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Agora que já é conhecida a relação entre as coordenadas de vetores escritas em bases associadas a dois sistemas de coordenadas S_i e S_j , dada pela equação (41), é possível relacionar as coordenadas de um ponto P escritas no sistema S_i (designadas pela matriz coluna ${}^{S_i}\mathbf{p}^P$, cujas três primeiras linhas são efetivamente as coordenadas de P em S_i e cuja última linha é igual a 1) com as coordenadas desse ponto escritas no sistema S_j (designadas pela matriz coluna ${}^{S_j}\mathbf{p}^P$). Para tal é conveniente observar que as coordenadas do ponto P no sistema S_i são as coordenadas do vetor $\mathbf{p}^{O_i P}$ escritas na base associada a esse sistema de coordenadas. Ainda, sabe-se que é válida a seguinte equação:

$$\mathbf{p}^{O_i P} = \mathbf{p}^{O_i O_j} + \mathbf{p}^{O_j P} \quad (42)$$

Definindo ${}^{S_i}\mathbf{p}^{O_j}$ como sendo a matriz coluna cujas três primeiras linhas são as coordenadas do vetor $\mathbf{p}^{O_i O_j}$ escritas na base associada ao sistema S_i e

cujas última linha é igual a 1, pode-se definir a transformação homogênea do sistema S_j para o sistema S_i como sendo dada por:

$${}^{S_i}\mathbf{p}^P = \begin{bmatrix} {}^{S_i}\mathbf{R}_{S_j} & {}^{S_i}\mathbf{p}^{O_j} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & 1 \end{bmatrix} {}^{S_j}\mathbf{p}^P = {}^{S_i}\mathbf{T}_{S_j} {}^{S_j}\mathbf{p}^P \quad (43)$$

A.2 VELOCIDADE ANGULAR E ACELERAÇÃO ANGULAR

Seja um referencial X_j e uma base de vetores unitários ortogonais $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ solidária a este referencial; define-se a velocidade angular do referencial X_j em um referencial X_i , denotada por ${}^{X_i}\boldsymbol{\omega}^{X_j}$, como sendo:

$${}^{X_i}\boldsymbol{\omega}^{X_j} = \mathbf{e}_1 \left(\frac{{}^{X_i}d\mathbf{e}_2}{dt} \cdot \mathbf{e}_3 \right) + \mathbf{e}_2 \left(\frac{{}^{X_i}d\mathbf{e}_3}{dt} \cdot \mathbf{e}_1 \right) + \mathbf{e}_3 \left(\frac{{}^{X_i}d\mathbf{e}_1}{dt} \cdot \mathbf{e}_2 \right) \quad (44)$$

Sejam as matrizes coluna $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = [1 \ 0 \ 0]'$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = [0 \ 1 \ 0]'$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_3 = [0 \ 0 \ 1]'$. Definindo um sistema de coordenadas S_j solidário a X_j que deve unicamente satisfazer à condição de que os vetores unitários ortogonais $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ sejam a base deste sistema e tomando um sistema de coordenadas S_i arbitrário que seja solidário a X_i , sabe-se pela equação (41) que as matrizes coluna com as coordenadas desses vetores unitários $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ na base de S_i podem ser dadas respectivamente por ${}^{S_i}\mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_1$, ${}^{S_i}\mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_2$ e ${}^{S_i}\mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}_3$. Assim sendo, a matriz das coordenadas das derivadas temporais desses vetores unitários em relação ao referencial X_i , escritas na base de S_i , podem ser dadas por ${}^{S_i}\dot{\mathbf{R}}\boldsymbol{\varepsilon}_1$, ${}^{S_i}\dot{\mathbf{R}}\boldsymbol{\varepsilon}_2$ e ${}^{S_i}\dot{\mathbf{R}}\boldsymbol{\varepsilon}_3$, e escritas na base de S_j , podem ser dadas por ${}^{S_j}\mathbf{R}_{S_i}{}^{S_i}\dot{\mathbf{R}}\boldsymbol{\varepsilon}_1$, ${}^{S_j}\mathbf{R}_{S_i}{}^{S_i}\dot{\mathbf{R}}\boldsymbol{\varepsilon}_2$ e ${}^{S_j}\mathbf{R}_{S_i}{}^{S_i}\dot{\mathbf{R}}\boldsymbol{\varepsilon}_3$. Finalmente, isso conduz à conclusão de que a velocidade angular do referencial X_j em relação ao referencial X_i pode ser calculada a partir das matrizes de mudança de base, a partir da seguinte relação, decorrente da definição fornecida pela equação (44):

$${}^{X_i}\boldsymbol{\omega}^{X_j} = \mathbf{e}_1 \left(\boldsymbol{\varepsilon}'_3 {}^{S_j}R_{{}^{S_i}} \dot{R}_{{}^{S_j}} \mathbf{e}_2 \right) + \mathbf{e}_2 \left(\boldsymbol{\varepsilon}'_1 {}^{S_j}R_{{}^{S_i}} \dot{R}_{{}^{S_j}} \mathbf{e}_3 \right) + \mathbf{e}_3 \left(\boldsymbol{\varepsilon}'_2 {}^{S_j}R_{{}^{S_i}} \dot{R}_{{}^{S_j}} \mathbf{e}_1 \right) \quad (45)$$

Em sua obra, Kane [1] demonstra que para um vetor $\mathbf{r}$ genérico é válida a seguinte relação para quaisquer referenciais X_i e X_j :

$$\frac{{}^{X_i}d\mathbf{r}}{dt} = \frac{{}^{X_j}d\mathbf{r}}{dt} + {}^{X_i}\boldsymbol{\omega}^{X_j} \times \mathbf{r} \quad (46)$$

Em particular aplicando essa relação para o próprio vetor velocidade angular ${}^{X_i}\boldsymbol{\omega}^{X_j}$, nota-se que é indiferente o cálculo da derivada do mesmo nos referenciais X_i ou X_j , sendo assim definida a aceleração angular do referencial X_j em relação ao referencial X_i :

$${}^{X_i}\boldsymbol{\alpha}^{X_j} = \frac{{}^{X_i}d({}^{X_i}\boldsymbol{\omega}^{X_j})}{dt} = \frac{{}^{X_j}d({}^{X_i}\boldsymbol{\omega}^{X_j})}{dt} \quad (47)$$

A.3 COORDENADAS GENERALIZADAS INDEPENDENTES E REDUNDANTES

Seja um sistema dinâmico com p graus de liberdade para o qual são adotadas n coordenadas generalizadas q_i ($i = 1, \dots, n$) com $n > p$. Neste caso, apenas p das n coordenadas podem efetivamente ser consideradas independentes, estando as demais associadas a estas por meio das denominadas equações vinculares, conforme discutido na seção 2. Em particular, considerando que tais vínculos sejam holonômicos ou não-holonômicos simples, existirá uma matriz $\mathbf{J}$ (com $n - p$ linhas e n colunas) denominada Jacobiano, função das coordenadas generalizadas e do tempo, tal que $\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$.

Escolhendo agora dentre as coordenadas q_i um conjunto de p coordenadas independentes, que passarão a ser denotadas como θ_r ($r = 1, \dots, p$) e denotando as demais coordenadas, as coordenadas redundantes, como ψ_s

($s = 1, \dots, n - p$), vê-se que é possível distinguir no Jacobiano duas matrizes, que serão denotadas como $\mathbf{J}_\theta$ (com $n - p$ linhas e p colunas) e $\mathbf{J}_\psi$ (com $n - p$ linhas e $n - p$ colunas) tais que $\mathbf{J}_\theta \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{J}_\psi \dot{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{0}$ (onde $\boldsymbol{\theta}$ é a matriz coluna formada pelos θ_r e $\boldsymbol{\psi}$ é a matriz coluna formada pelos ψ_s). Se a escolha dos θ_r foi feita de forma que eles são efetivamente independentes entre si, então a matriz $\mathbf{J}_\psi$ admite inversa, de tal forma que se tem $\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\mathbf{J}_\psi^{-1} \mathbf{J}_\theta \dot{\boldsymbol{\theta}}$. Prova-se assim, a existência de uma única matriz $\boldsymbol{\beta}$ tal que $\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\beta} \dot{\boldsymbol{\theta}}$, uma vez que $\dot{\mathbf{q}}$ é formado por uma reordenação dos elementos de $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ e $\dot{\boldsymbol{\theta}}$.

De forma geral, é possível, a partir do conhecimento do histórico temporal de coordenadas independentes θ_r ($r = 1, \dots, p$) determinar todas as coordenadas redundantes por meio da integração numérica das equações diferenciais $\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\mathbf{J}_\psi^{-1} \mathbf{J}_\theta \dot{\boldsymbol{\theta}}$. Tal procedimento de integração, contudo, exigirá o conhecimento dos ψ_s no instante inicial em que são dados os históricos temporais dos θ_r . Porém, tais condições iniciais não podem ser tomadas de forma arbitrária, dado que devem respeitar as condições impostas pelas equações vinculares.

Em particular, pode-se restringir tal análise ao caso em que os vínculos do sistema são todos holonômicos, ou seja, as equações vinculares, podem ser escritas como $f_s(q_1, \dots, q_n, t) = 0$ para $s = 1, \dots, n - p$. Neste caso, a solução numérica dessas equações algébricas no instante inicial basta para a determinação dos históricos completos de todas as coordenadas do mecanismo pela integração numérica das equações diferenciais $\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\mathbf{J}_\psi^{-1} \mathbf{J}_\theta \dot{\boldsymbol{\theta}}$. O método a ser utilizado é o proposto por Kane e Levinson [1], exigindo a definição de funções $z_i(\xi)$ para $i = 1, \dots, n - p$ sejam funções de uma variável ξ com $0 \leq \xi \leq 1$. Deve-se escolher como o valor de z_i em $\xi = 0$ um valor arbitrário contanto que seja coerente com a configuração do ψ_i respectivo (por exemplo, se é sabido que a configuração do problema permite que um dado ψ_i somente esteja num dado intervalo de valores, o valor de $z_i(0)$ deve estar dentro desse intervalo). Ainda, deve-se requerer que as funções $z_i(\xi)$ satisfaçam as equações (neste caso, considera-se

conhecidos os θ_i , ou seja, eles deixam de ser variáveis das equações vinculares, ficando como variáveis apenas os z_i que servirão para determinar os ψ_i incógnitos):

$$f_s(z_1, \dots, z_{n-p}) = (1 - \xi)f_s(z_1(0), \dots, z_{n-p}(0)) \quad \text{para } s = 1, \dots, n-p \quad (48)$$

Evidentemente, a condição imposta em (48) automaticamente implica que os valores de z_i em $\xi = 1$ sejam raízes das equações vinculares. Diferenciando as equações em (48) em relação à variável ξ , obtém-se que:

$$\sum_{i=1}^{n-p} \frac{\partial f_s}{\partial z_i} \frac{dz_i}{d\xi} = -f_s(z_1(0), \dots, z_{n-p}(0)) \quad \text{para } s = 1, \dots, n-p \quad (49)$$

Denotando $\mathbf{z}(\xi) = [z_1(\xi) \ \cdots \ z_{n-p}(\xi)]'$, e $\mathbf{f}(\mathbf{z}(\xi)) = [f_1(\mathbf{z}(\xi)) \ \cdots \ f_{n-p}(\mathbf{z}(\xi))]'$, pode-se escrever a equação (49) na forma:

$$\mathbf{J}_z \frac{d\mathbf{z}}{d\xi} = -\mathbf{f}(\mathbf{z}(0)) \quad \text{onde} \quad \mathbf{J}_z = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_{n-p}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-p}}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_{n-p}}{\partial z_{n-p}} \end{bmatrix} \quad (50)$$

A integração desta equação permite a determinação dos valores de $\mathbf{z}(1)$ que representa um conjunto de raízes para $\mathbf{f}$. Se a escolha dos valores de $\mathbf{z}(0)$ for feita respeitando as configurações dos ψ_i , os valores de $\mathbf{z}(1)$ obtidos serão as raízes desejadas.

A.4 EXPRESSÕES DA DINÂMICA DE LAGRANGE

Seja um sistema dinâmico com p graus de liberdade para o qual são adotadas n coordenadas q_i . Considere ainda que o sistema em estudo é

constituído por um conjunto de N_B corpos rígidos. Pode-se conceber o conjunto de esforços atuantes sobre um particular corpo B_j desse sistema como sendo equivalente a uma força $\mathbf{F}_j$ atuante em um ponto P_j deste corpo juntamente com um momento $\mathbf{T}_j$ (vide Kane [1]). Dessa forma, sendo ${}^X\mathbf{v}^{P_j}$ a velocidade de P_j medida em relação a um referencial inercial X e ${}^X\boldsymbol{\omega}^{B_j}$ a velocidade angular de B_j relativa a esse referencial, obtém-se que, excluindo os esforços cujos efeitos já foram incluídos nas expressões de energia potencial V a expressão para os esforços ativos generalizados não-conservativos Q_r , associados às coordenadas q_r , é dada por:

$$Q_r = \sum_{j=1}^{N_B} \left(\mathbf{F}_j \cdot \frac{\partial {}^X\mathbf{v}^{P_j}}{\partial \dot{q}_r} + \mathbf{T}_j \cdot \frac{\partial {}^X\boldsymbol{\omega}^{B_j}}{\partial \dot{q}_r} \right) \quad (51)$$

Em particular, se os únicos esforços conservativos atuantes no sistema são os gravitacionais e os devidos às forças elásticas lineares, a expressão da energia potencial do sistema pode ser calculada considerando conhecidas as massas m_j de cada corpo B_j , o vetor posição $\mathbf{p}^{OB_j^*}$ do centro de massa B_j^* de cada corpo com origem num ponto O fixo no referencial inercial X , o vetor aceleração da gravidade $\mathbf{g}$, a rigidez k_j de cada um dos N_K elementos elásticos do sistema e as expressões das deflexões γ_j desses elementos como função das coordenadas q_i ($i = 1, \dots, n$):

$$V = - \sum_{j=1}^{N_B} m_j \left(\mathbf{p}^{OB_j^*} \cdot \mathbf{g} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_K} k_j \gamma_j^2(q_1, \dots, q_n) \quad (52)$$

A energia cinética por sua vez pode ser calculada considerando que o sistema em estudo é formado por um conjunto de corpos rígidos. Sendo m_j a massa do corpo B_j e $\mathbf{I}^{B_j/B_j^*}$ o tensor de inércia do corpo B_j calculado com relação a eixos passantes pelo seu centro de massa B_j^* , tem-se a energia cinética do sistema dada por:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_B} \left(m_j {}^X \mathbf{v}^{B_j^*} \cdot {}^X \mathbf{v}^{B_j^*} + {}^X \boldsymbol{\omega}^{B_j} \cdot \mathbf{I}^{B_j/B_j^*} \cdot {}^X \boldsymbol{\omega}^{B_j} \right) \quad (53)$$

A.5 EXPRESSÕES DA DINÂMICA DE KANE

Seja um sistema dinâmico holonômico ou não-holonômico simples com p graus de liberdade para o qual são adotadas n coordenadas q_i ($i = 1, \dots, n$). Conforme discutido na seção A.3, é possível definir um conjunto de p coordenadas independentes dentre os q_i , sendo tais variáveis renomeadas como θ_r ($r = 1, \dots, p$), de tal forma que as demais variáveis podem ser tratadas como variáveis redundantes (ou pseudo-generalizadas), sendo denotadas como ψ_s ($s = 1, \dots, n - p$).

Kane [1] define velocidades generalizadas de um sistema como um conjunto de n variáveis u_j (onde n é o número de coordenadas adotado), de tal forma que é possível escrever cada uma das derivadas temporais das coordenadas generalizadas como $\dot{q}_i = Z_i + \sum_{j=1}^n W_{ij} u_j$, onde os Z_i e os W_{ij} podem ser funções dos q_i e do tempo t , com cada u_j podendo ser expresso univocamente como função dos $\dot{q}_i$. Dessa forma, existe uma relação biunívoca entre o conjunto de velocidades generalizadas e o conjunto de derivadas temporais das coordenadas generalizadas, o que permite inferir que neste sistema, apenas p das n velocidades generalizadas serão efetivamente funções independentes na dinâmica deste sistema. Assim, Kane [1] afirma que, por meio de uma escolha adequada destas variáveis, é possível descrever cada derivada temporal de uma dada coordenadas $\dot{q}_i$ como função apenas dos p primeiros u_j , ou seja, $\dot{q}_i = Z_i + \sum_{j=1}^p Y_{ij} u_j$. A escolha adequada das velocidades generalizadas u_j , tal que apenas os p primeiros sejam efetivamente independentes pode ser feita da seguinte forma: determinam-se as p primeiras velocidades generalizadas como

função exclusiva dos $\dot{\theta}_r$ (com termos lineares com relação a estas variáveis), ou seja, $u_r = u_r(\dot{\theta}_1, \dots, \dot{\theta}_p, q_1, \dots, q_n, t)$ para $r = 1, \dots, p$ e as demais, permite-se que dependam também dos $\dot{\psi}_s$ (também como termos lineares em relação a estes), ou seja, $u_{p+s} = u_{p+s}(\dot{\theta}_1, \dots, \dot{\theta}_p, \dot{\psi}_1, \dots, \dot{\psi}_{n-p}, q_1, \dots, q_n, t)$ para $s = 1, \dots, n - p$.

Dessa forma, Kane [1] demonstra que a velocidade em um referencial inercial X de um ponto P qualquer desse sistema ou mesmo a velocidade angular em X de um corpo rígido B qualquer pertencente a esse sistema, podem ser expressos de forma única como:

$$\mathbf{v}^P = \sum_{r=1}^p \bar{\mathbf{v}}_r^P u_r + \bar{\mathbf{v}}_t^P \quad \quad \quad \boldsymbol{\omega}^B = \sum_{r=1}^p \bar{\boldsymbol{\omega}}_r^B u_r + \bar{\boldsymbol{\omega}}_t^B \quad (54)$$

Nestas expressões, $\bar{\mathbf{v}}_r^P, \bar{\boldsymbol{\omega}}_r^B$ ($r = 1, \dots, p$), $\bar{\mathbf{v}}_t^P$ e $\bar{\boldsymbol{\omega}}_t^B$ são funções somente das coordenadas $q_1, \dots, q_n$ e do tempo t e ainda, são únicos. Em particular, $\bar{\mathbf{v}}_r^P$ é denominada a r -ésima velocidade parcial não-holonômica de P no referencial X e $\bar{\boldsymbol{\omega}}_r^B$ é denominada a r -ésima velocidade angular parcial não-holonômica de B no referencial X .

Considere agora que o sistema possua N_P partículas, e que a resultante das forças atuantes sobre a partícula P_j seja dada por $\mathbf{R}_j$. Definem-se p quantidades denominadas forças ativas generalizadas não-holonômicas como sendo:

$$\bar{F}_r \triangleq \sum_{j=1}^{N_P} \left(\bar{\mathbf{v}}_r^{P_j} \cdot \mathbf{R}_j \right) \quad \text{para} \quad r = 1, \dots, p \quad (55)$$

Porém, se algumas das partículas desse sistema constituem um corpo rígido B , os esforços atuantes sobre B podem ser tratados como sendo equivalentes a uma força $\mathbf{R}$ aplicada em um ponto P desse corpo e um momento $\mathbf{M}$ (calculado com pólo em P), de tal forma que o efeito destes

esforços sobre as forças ativas generalizadas não-holonômicas pode ser alternativamente computado por meio da seguinte expressão (vide Kane [1]):

$$(\bar{F}_r)_B = \bar{\mathbf{v}}_r^P \cdot \mathbf{R} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_r^B \cdot \mathbf{M} \quad \text{para} \quad r = 1, \dots, p \quad (56)$$

Demonstra-se ainda que forças de contato entre superfícies em que o atrito é desprezível ou em que há rolamento sem escorregamento e forças mutuamente exercidas entre dois pontos pertencentes a um mesmo corpo rígido, apesar de contribuírem para as resultantes $\mathbf{R}_i$, não contribuem para as forças ativas generalizadas não-holonômicas (vide Kane [1]).

Em analogia, as forças de inércia generalizadas não-holonômicas são definidas por meio da seguinte expressão:

$$\bar{F}_r^* \triangleq \sum_{j=1}^{N_P} \left(\bar{\mathbf{v}}_r^{P_j} \cdot \mathbf{R}_j^* \right) \quad \text{para} \quad r = 1, \dots, p \quad (57)$$

Em particular, a força de inércia da partícula P_j no referencial X pode ser definida em função da massa m_j dessa partícula e de sua aceleração ${}^R\mathbf{a}^{P_j}$ em relação a X , como $\mathbf{R}_j^* = -m_j {}^X\mathbf{a}^{P_j}$. Ainda, se parte das partículas do sistema constituem um corpo rígido B , a contribuição das forças de inércia de B para as forças de inércia generalizadas não-holonômicas pode alternativamente ser calculada pela expressão:

$$(\bar{F}_r^*)_B = \bar{\mathbf{v}}_r^{B^*} \cdot \mathbf{R}^* + \bar{\boldsymbol{\omega}}_r^B \cdot \mathbf{M}^* \quad \text{para} \quad r = 1, \dots, p \quad (58)$$

Nesta equação, $\mathbf{R}^* = -m_B {}^X\mathbf{a}^{B^*}$, onde m_B é a massa total de B e B^* é o centro de massa de B , e $\mathbf{M}^* = -{}^X\boldsymbol{\alpha}^B \cdot \mathbf{I}^{B/B^*} - {}^X\boldsymbol{\omega}^B \times \mathbf{I}^{B/B^*} \cdot {}^X\boldsymbol{\omega}^B$, onde $\mathbf{I}^{B/B^*}$ é o tensor central de inércia do corpo B , ${}^X\boldsymbol{\omega}^B$ é a velocidade angular de B em X e ${}^X\boldsymbol{\alpha}^B$ é a aceleração angular de B em X .

APÊNDICE B – ROTINAS PARA SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DE EQUAÇÕES DINÂMICAS

A fim de que as equações dinâmicas obtidas de forma analítica a partir da série de análises realizadas ao longo deste estudo possam conduzir a resultados passíveis de avaliações acerca da dinâmica do mecanismo, há a necessidade de implementar um algoritmo numérico que seja capaz de resolvê-las para diversas possibilidades e em diversas condições.

Conforme discutido, com um conjunto de equações dinâmicas podem ser realizados os seguintes tipos de simulação numérica: a inversa, que essencialmente consiste em encontrar para um histórico conhecido de movimento do sistema, o histórico de esforços atuantes que são necessários para a ocorrência de tal movimento, e as simulações diretas, que consistem na integração numérica das equações dinâmicas a partir de um conjunto conhecido de esforços atuantes, tendo como resultado o histórico do movimento do sistema.

Deve-se notar que devido à complexidade que as equações dinâmicas podem apresentar, torna-se inviável a realização de soluções analíticas dessas equações, sendo necessário o desenvolvimento de um método numérico para simulações, não havendo outra possibilidade para realizá-las. Contudo, algumas características são desejáveis para o método numérico desenvolvido, sendo as principais listadas a seguir:

- Robustez dos métodos numéricos utilizados e precisão dos resultados;
- Validade para quaisquer condições de entrada impostas, dentro de amplos limites de tolerância;
- Velocidade de simulação, o que pode viabilizar o eventual uso do modelo dinâmico para sistemas de controle em tempo real;

- Possibilidade de aplicação para sistemas de equações diferenciais de diversas formas, com diversas variáveis e ordens.

Outro aspecto que deve ser considerado na elaboração de rotinas de simulação é o software que será utilizado para o desenvolvimento e a execução desta rotina. Em geral, estudos na literatura de simulação dinâmica numérica normalmente utilizam principalmente um dos três seguintes softwares:

- MATLAB, software proprietário desenvolvido pela MathWorks, sendo o mais popular dentre os softwares utilizados para simulação dinâmica, por possuir uma série de pacotes que auxiliam no desenvolvimento de rotinas, principalmente no tocante à síntese de sistemas de controle.
- Scilab, software livre de código aberto criado nos anos 1990 por pesquisadores do INRIA e do ENPC e atualmente mantido pelo Scilab Consortium, formado pela INRIA e pela Digiteo Foundation, que apresenta versões disponíveis para Microsoft Windows, Linux e MAC OS.
- Octave, software livre e de código aberto do Projeto GNU, que apresenta versões prioritariamente desenvolvidas para distribuições de Linux como o Debian, mas que também apresenta versões para Windows.

Dos três softwares apresentados, o escolhido para o desenvolvimento das rotinas foi o Scilab, pelo fato de ser um software livre, com versões disponíveis para os principais sistemas operacionais utilizados e por possuir bom desempenho em Windows (condição não satisfeita pelo Octave). A versão escolhida do programa para a implementação das rotinas foi a 4.1.2, a última versão da família 4 do programa que é uma versão estável, bastante desenvolvida, que apresenta poucos problemas de compatibilidade em Windows e um pacote gráfico de maior qualidade em relação à família 5,

mais recente, que representa uma reformulação do software após a entrada da Digiteo no Scilab Consortium.

Escolhido o software a ser utilizado como ambiente de simulação, o próximo passo é definir a estrutura das rotinas de simulação. Essencialmente, havendo simulações numéricas de duas naturezas bastante distintas, a direta e a inversa, nota-se a necessidade de que sejam elaboradas duas rotinas, uma para cada tipo de situação. O restante deste apêndice será dedicado à descrição da estrutura das rotinas adotadas para as simulações numéricas de dinâmica inversa e direta.

Primeiramente, em relação a ambas as simulações, as variáveis podem basicamente ser classificadas em cinco grupos:

- Variáveis de entrada (*inputs*): são variáveis que refletem as condições iniciais⁸ do sistema e as interações desse sistema com o meio.
- Parâmetros físicos do sistema: são variáveis que refletem características particulares do sistema, que permanecem independentemente de seu estado inicial e de suas interações com o meio; dessa forma, são valores que devem permanecer inalterados independentemente da simulação realizada.
- Parâmetros de simulação: variáveis associadas aos métodos numéricos empregados, e que independem da natureza física do problema, apenas dos algoritmos empregados, como é o caso do passo de integração numérica, por exemplo; neste caso, tais valores podem ser alterados conforme a melhoria de desempenho

⁸ O particular sistema em estudo tem como modelo matemático um sistema de equações diferenciais ordinárias cuja variável independente é o tempo. Neste caso, tem-se o que se denomina problema com condições iniciais. Em relação a sistemas de equações diferenciais, existem ainda problemas de outra natureza, denominados problemas com condições de contorno, que fogem do escopo deste projeto.

apresentada pelos algoritmos, dada essencialmente pelo compromisso entre precisão numérica do resultado e o tempo de simulação.

- Variáveis de saída ou resultados (*outputs*): podem ser consideradas como sendo as respostas desejadas da simulação, sendo variáveis cujo conhecimento somente pode ser obtido após a realização da simulação correspondente.
- Variáveis auxiliares: são variáveis que em princípio não poderiam ser enquadradas em qualquer um dos grupos anteriores, sendo utilizadas apenas para auxiliar a melhor execução dos algoritmos e para minimizar o número de operações necessárias ao longo da simulação.

Deve-se notar que tanto nas simulações numéricas de dinâmica direta quanto nas de dinâmica inversa, os parâmetros físicos utilizados foram os mesmos, uma vez que se trata de um mesmo sistema físico. Os parâmetros de simulação, podem ou não ser iguais nos dois casos, sendo sua escolha muito mais dependente da qualidade da simulação do que de qualquer outro fator. O que irá diferenciar essas simulações primordialmente serão as variáveis de entrada e de saída.

No caso da simulação dinâmica direta, as variáveis de entrada são as condições iniciais de posição e velocidade definidas por um número de variáveis igual ao dobro do número de graus de liberdade do mecanismo estudado e o histórico temporal dos esforços impostos pelos atuadores do sistema (vide seções 2.2 e 2.3). Após a simulação, obtém-se como resultados os históricos temporais de todas as coordenadas que determinam o movimento do mecanismo. Dessa forma, a construção de um algoritmo para simulação numérica de dinâmica direta envolve basicamente a construção das seguintes funções essenciais:

- Função para o cálculo dos valores das equações vinculares dadas as coordenadas do movimento: utilizada para verificar a correta relação entre as variáveis dependentes que representam o movimento do mecanismo.
- Função para a solução numérica das equações vinculares para um dado conjunto independente e conhecido de coordenadas de movimento: para encontrar, a partir de um número independente de variáveis de condições iniciais, os valores das demais variáveis de movimento dependentes neste instante inicial, viabilizando as condições iniciais para o algoritmo de integração numérica.
- Função para o cálculo dos jacobianos e de grandezas associadas: os jacobianos são utilizados tanto para a solução numérica das equações vinculares, quanto para o cálculo das formas matriciais das equações dinâmicas.
- Funções para o cálculo das formas matriciais das equações diferenciais de movimento obtidas segundo as dinâmicas de Lagrange e de Kane.
- Função com método de integração das equações dinâmicas para a obtenção do histórico completo de coordenadas do movimento a partir das condições iniciais e condições de esforços impostas.
- Funções auxiliares para exibir graficamente a resposta.

No caso da simulação inversa, as variáveis de entrada são os históricos temporais de um número de variáveis igual ao de graus de liberdade do mecanismo que representam completamente seu movimento. As variáveis de saída são os históricos temporais dos esforços requeridos pelos atuadores para a realização do movimento. Neste caso, o algoritmo de simulação envolverá a construção das seguintes funções:

- Funções para o cálculo dos valores das equações vinculares, para a solução das equações vinculares e para o cálculo de jacobianos e grandezas associadas, sendo tais funções idênticas às utilizadas nas simulações dinâmicas diretas e tendo as mesmas atribuições.
- Função com a forma diferencial das equações vinculares e função para a integração dessas equações, sendo conhecido um histórico de coordenadas independentes de movimento.

Funções com as equações dinâmicas de Lagrange e de Kane escritas de forma a explicitar os esforços impostos pelos atuadores que serão os resultados destas simulações.